N° d'ordre :

THÈSE

DE

DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS XI
CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

Michel SERMANGE

1er sujet de la thèse :

ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES INTERVENANT EN PHYSIQUE DES PLASMAS

2ème sujet de la thèse :

IMPLANTATION DE DONNÉES DANS DES MÉMOIRES PARALLÈLES

Soutenue le 2 juin 1982 devant la Commission composée de :

MM.	J. L.	LIONS	Président
	R.	GLOWINSKI	Examinateurs
	H.	GRAD	
	J.	LENFANT	
	J. P.	PUEL	
	L.	TARTAR	
	R.	TEMAM	

N° d'ordre: 2589

THÈSE

DE

DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS XI
CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

Michel SERMANGE

1er sujet de la thèse :

ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES INTERVENANT EN PHYSIQUE DES PLASMAS

2ème sujet de la thèse :

IMPLANTATION DE DONNÉES DANS DES MÉMOIRES PARALLÈLES

Soutenue le 2 juin 1982 devant la Commission composée de :

MM.	J. L.	LIONS	Président
	R.	GLOWINSKI	Examinateurs
	H.	GRAD	
	J.	LENFANT	
	J. P.	PUEL	
	L.	TARTAR	
	R.	TEMAM	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont initié et qui ont cheminé avec moi dans le domaine de la recherche. Le travail présenté ici est le fruit de cet accompagnement.

Je voudrais plus particulièrement témoigner ma reconnaissance à Monsieur TEMAM qui a dirigé cette thèse, à Messieurs LIONS et GLOWINSKI qui m'ont accueilli au sein de l'INRIA, à Monsieur GRAD qui m'a prodigué de précieux conseils, à Messieurs PUEL et TARTAR qui me font l'honneur de participer à ce jury, à Monsieur LENFANT qui m'a guidé dans la préparation du second sujet.

Enfin ma gratitute va à Madame WEBER pour le soin apporté à la dactylographie de ce document.

PAPIER RÉCUPÉRÉ ET

Le bon sens, quoi qu'il fasse, ne peut manquer de se laisser surprendre à l'occasion. Le but de la science est de lui épargner cette surprise (...) de façon à éviter, en tout cas, l'imprévu.

B.R.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

PARTIE PRELIMINAIRE

I - Study of a few equations based on the HODGKIN-HUXLEY model 11

PREMIERE PARTIE - Equations d'équilibres

II - Une méthode numérique en bifurcation - application à un problème à frontière libre de la physique des plasmas 29

III - Bifurcation of free boundary plasma equilibria 55

IV - Non convex methods for computing free boundary equilibria of axially symmetric plasmas(*) 75

DEUXIEME PARTIE - Equations de stabilité

V - Modélisation de la stabilité magnétohydrodynamique bidimensionnelle par un problème aux limites généralisé 119

VI - Etude numérique des bifurcations et de la stabilité des solutions des équations de GRAD-SHAFRANOV 153

VII - Calcul de la stabilité magnétohydrodynamique axisymétrique 171

ANNEXE

VIII - Physique des plasmas : modules de calcul d'équilibres MHD axisymétriques 187

(*) en collaboration avec B. HERON

INTRODUCTION

Le chauffage d'un plasma à très haute température en vue d'obtenir une réaction de fusion thermonucléaire nécessite un dispositif de confinement pour neutraliser la tendance naturelle à la dilatation ; celui-ci peut être d'ordre magnétique (comme dans le Tokamak) ou d'ordre inertiel (chauffage par Laser). La théorie de la MHD (magnétohydrodynamique) semble être un modèle valide pour étudier le premier type de confinement, tandis qu'elle est insuffisante pour le second type et qu'il faut alors se placer dans le cadre de la mécanique statistique (en utilisant par exemple les équations de Vlasov).

Les travaux présentés ici (mis à part le Chap. I) portent sur des problèmes aux limites non linéaires rencontrés en MHD. Ils sont regroupés en deux thèmes : équations d'équilibre et équations de stabilité.

Les équations d'équilibres MHD axisymétriques à frontière libre (équations de STOKES-GRAD-SHAFRANOV) ont été introduites dans la littérature mathématique par TEMAM et étudiées par divers auteurs du point de vue existence, régularité, unicité ou non-unicité (BERESTYCKI-BREZIS, DAMLAMIAN, KINDERLEHRER-SPRUCK, PUEL, SCHAEFFER, TEMAM). Nous abordons ici les questions de bifurcation, de convergence de méthodes de calcul, d'existence de solutions dans un cadre discontinu.

La stabilité MHD (deuxième thème) peut être déterminée par le principe de Bernstein et al (un système spectral vectoriel) ; notre travail mathématique porte sur l'équivalence, dans le cas de la stabilité bidimensionnelle ou axisymétrique, entre ce modèle et un problème aux valeurs propres scalaire que nous introduisons.

Nous présentons maintenant chacun des chapitres.

Partie préliminaire

I - *"Study of a few equations based on the HODGKIN-HUXLEY model"*
Math. Biosc., 36, 45-60 (1977).

Ce travail, débuté sous l'instigation de E. CORABOEUF (Prof. de Physiologie Comparée à Orsay), porte sur l'étude de problèmes aux limites évolutifs non linéaires modélisant la conduction nerveuse (équations de HODGKIN-HUXLEY) ou le potentiel d'action des cellules cardiaques (modification des équations de HODGKIN-HUXLEY par NOBLE ou BESSEAU).

Nous établissons que la région où les quantités physiques ont un sens ($0 \leq$ activations, inactivations ≤ 1 ; potentiel électrique compris entre les potentiels d'inversions) est invariante : si les conditions initiales et aux limites sont dans cet ensemble, il existe une solution sur $[0,T]$ (pour tout T)

et elle est à valeur dans cet ensemble. L'outil de démonstration est le théorème du point fixe des applications contractantes.

Signalons par ailleurs que la méthode numérique à pas fractionnaires étudiée dans (*) a été récemment insérée dans la bibliothèque de programmes du club INTERLIB (**).

Première partie - Equations d'équilibres.

II - *"Une méthode numérique en bifurcation : application à un problème à frontière libre de la physique des Plasmas"*, Appl. Math. and Opt. 5, 127-151, (1979).

La première partie de cet article porte sur une méthode itérative générale proposée par MARDER et WEITZNER pour déterminer les points fixes d'un opérateur T :

$$(0.1)\qquad \begin{cases} u^{n+1/3} = Tu^{n} \\ u^{n+2/3} = Tu^{n+1/3} \\ u^{n+1} = (1-\alpha)u^{n} + 2\alpha u^{n+1/3} - \alpha u^{n+2/3}. \end{cases}$$

Utilisant un théorème de KITCHEN, nous démontrons la convergence locale de cet algorithme sans supposer l'opérateur T de classe C^1 (ni bien sûr sans le supposer contractant).

Dans la deuxième partie, nous proposons deux algorithmes de calcul des solutions du problème modèle en équilibres MHD :

$$(0.2)\qquad \begin{cases} -\Delta\psi = \lambda\psi_{+} \text{ dans } \Omega, \\ \psi = \text{cte (inconnue) sur } \partial\Omega = \Gamma, \\ -\int_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\, d\sigma = I. \end{cases}$$

Le premier algorithme est

$$(0.3)\qquad \begin{cases} -\Delta\psi^{n+1} = \lambda\psi_{+}^{n} \text{ dans } \Omega, \\ \psi^{n+1} = \text{cte(inconnue) sur } \Gamma, \\ \int_{\Omega} \psi_{+}^{n+1}\, dx = I/\lambda, \end{cases}$$

(*) *"Sur des problèmes à région invariante intervenant en physiologie animale"*, M. SERMANGE, Thèse 3ème cycle, Paris XI-Orsay, Dec. 77.

(**) *"The Hodgkin-Huxley model for nervous signals"*, M. SERMANGE, in *"French contribution to INTERLIB"*, May 1981, INRIA, supervised by O. PIRONNEAU, pp. 31-38.

le deuxième algorithme est la combinaison de (0.3) et (0.1).

Nous démontrons que le premier algorithme est localement convergent au voisinage de toute solution "variationnelle" et que le second algorithme est localement convergent autour de toute solution "ordinaire"(*).

Utilisant un domaine Ω en forme de sablier, discrétisé par la méthode des éléments finis, nous obtenons numériquement une branche bifurquée de solutions.

III - *"Bifurcation of free boundary plasma equilibria"*, Duke Math. J., 47, 923-942 (1980).

Choisissant un domaine Ω en forme de sablier, D.G. SCHAEFFER a démontré la non-unicité de solution pour (0.2) lorsque la partie médiane de Ω est suffisamment étroite. Mais il n'y avait pas de raison mathématique pour conclure ou non à une bifurcation (les résultats numériques du Chap. I n'étant pas des preuves). L'objet de cet article est de démontrer l'existence d'une bifurcation, lorsque Ω est symétrique par rapport à une droite passant par la partie étranglée. L'outil mathématique employé est le degré topologique, qui est calculé pour $\lambda = \lambda_2$ et $\lambda = \lambda_3$ (2ème et 3ème valeurs propres du laplacien avec condition aux limites de Dirichlet). La bifurcation ayant lieu sur une branche non triviale, il ne semble pas qu'elle puisse être démontrée par des arguments locaux (type théorème de CRANDALL-RABINOWITZ).

Notre démontration utilise aussi des résultats non standard sur les valeurs propres de problèmes elliptiques à coefficients discontinus, que nous établissons (en appendice) en employant notamment le principe de prolongement unique de HÖRMANDER.

IV - *"Non convex methods for computing free boundary equilibria of axially symmetric plasmas"* (en collaboration avec B. HERON), Appl. Math. and Opt., à paraître (Vol. 8, 1982).

Le début de cet article porte sur le problème abstrait suivant. Etant données deux fonctionnelles convexes F et G définies sur un espace de Banach V, nous nous intéressons au problème

$$\partial G(u) \cap \partial F(u) \neq \emptyset \qquad (0.4)$$

lorsque G est continue, constante par rapport aux translations dans un sous-

---

(*) c.a.d. 1 n'est pas valeur propre du problème linéarisé.

espace Z et coercive sur V/Z et que F est faiblement continue sur V et coercive sur Z.

Lorsque l'ensemble des solutions de (0.4) est fini, nous démontrons que l'algorithme suivant

$$(0.5)\qquad \begin{cases} \underline{\text{1ère étape}} - \quad L^n \in \partial F(u^n) \cap Z^o \\ \text{et } U^{n+1} \text{ solution de} \\ \qquad \operatorname{Inf}_{U \in V/Z} \{G(U) - L^n(U)\}\ , \\ \underline{\text{2ème étape}} - \\ u^{n+1} \text{ solution de } \operatorname{Inf}_{u \in U^{n+1}} F(u)\ , \end{cases}$$

fournit, *quelque soit l'initialisation*, une suite qui converge vers une solution de (0.4).

Nous faisons ensuite une approximation interne de l'espace V et nous démontrons un résultat de convergence des solutions approchées.

La suite de cet article est une application aux équations générales de STOKES-GRAD-SHAFRANOV :

$$(0.6)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}\psi = r\,p'(\psi) + \frac{1}{r} f(\psi) f'(\psi) \text{ dans } \Omega, \\ \psi = \text{cte (inconnue) sur } \Gamma, \\ -\int_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, d\sigma = I, \end{cases}$$

où $\mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ et $p'(s) = f'(s) = 0$ pour $s < 0$.

Lorsque $r\,p'(s) + \frac{1}{r} f(s) f'(s)$ est une *fonction de s croissante* (au sens large), *non nécessairement continue*, et que l'ensemble des solutions de (0.6) est fini, l'algorithme (0.5) converge quelque soit l'initialisation. Cet algorithme généralise (0.3) (où $p'(s)+f(s)f'(s) = \lambda s_+$) et ce résultat de convergence global étend un résultat de BERESTYCKI-BREZIS (où $r\,p'(s) + \frac{1}{r} f(s)f'(s)$ est supposée continue et strictement croissante).

Des résultats numériques sont donnés pour le problème

$$(0.7)\qquad \begin{cases} -\Delta\psi = \lambda H(\psi) \text{ dans } \Omega, \\ \psi = \text{cte(inconnue) sur } \Gamma, \\ -\int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, d\sigma = I, \end{cases}$$

où H est la fonction d'Heaviside.

L'algorithme (0.5) est également appliqué au calcul de la forme d'une chaine pesante située dans un plan vertical tournant à vitesse constante.

Deuxième partie - Equations de stabilité.

V - *"Modélisation de la stabilité magnétohydrodynamique bidimensionnelle par un problème aux limites généralisé"*, soumis au J. de Math. Pures et Appliquées.

Dans le cadre bidimensionnel, le principe de stabilité MHD de Bernstein et al est un système spectral de deux équations à deux inconnues. Plusieurs auteurs ont montré que le spectre correspondant possède une partie continue (GRAD, DESCLOUX-GEYMONAT).

Une partie de cet article est l'élaboration d'outils mathématiques (basés sur le théorème intégral de Federer et l'image directe d'une distribution) qui permettent d'effectuer sur la fonctionnelle de Bernstein une *minimisation exacte sur* $\mathcal{D}'(\Omega)$ (espace des distributions).

Nous montrons ainsi l'équivalence (sous certaines conditions) entre le principe de Bernstein (dans le cadre bidimensionnel) et le principe suivant, basé sur un *problème aux valeurs propres scalaire à spectre ponctuel*.

Un équilibre MHD bidimensionnel, de flux $\psi(x_1,x_2)$[1] et de pression $P(\psi)$, est stable si et seulement si $\mu_1 \geq 1$ où μ_1 est la première valeur propre du problème suivant :

$$(0.8)\qquad \begin{cases} -\Delta u - \dfrac{d}{dt}\left(\gamma p(t)\rho^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\dfrac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right)_{t=\psi(x)} + (p''(\psi))_- u = \mu (p''(\psi))_+ u \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et } u(x) = 0 \text{ lorsque } \nabla\psi(x) = 0, \end{cases}$$

où $\rho(t) = \displaystyle\int_{\psi=t} \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}$.

VI - *"Etude Numérique des bifurcations et de la stabilité des solutions des équations de GRAD-SHAFRANOV"*, Actes du IV Colloque International sur les Méthodes de Calcul Scientifique et Technique, Versailles 1979, R. Glowinski-J.L. Lions edit., North-Holland 1980, pp. 93-110.

Il s'agit d'un article de synthèse avec des

([1]) pour simplifier cette introduction, les courbes $\psi=t$ sont supposées simples.

commentaires originaux concernant la mise en oeuvre numérique des algorithmes développés au chap. II et au chap. V. On y trouve notamment un exemple de résolution numérique complète du problème (0.8) (remarque : article antérieur au chap. V).

VII - *"Calcul de la stabilité magnétohydrodynamique axisymétrique".*

Dans le cas tridimensionnel, le principe de Bernstein et al est équivalent à un problème spectral de trois équations à trois inconnues, chacune d'entre elles étant une fonction de trois variables.

Grâce à une décomposition de Fourier de ces fonctions par rapport à la variable ϕ (angle autour de l'axe de symétrie de l'équilibre), l'étude de la stabilité peut se faire par mode m ($m \in \mathbb{N}$) ; il s'agit alors d'un système de trois équations à trois inconnues, chacune d'entre elles étant une fonction de deux variables.

Il est couramment admis par les physiciens que le mode le plus important est le mode m = 1. Vient ensuite le mode m = 0 (stabilité axisymétrique) qui est le mode étudié ici.

Ce chapitre porte sur des transformations (calculs algébriques et intégrations par parties) de la fonctionnelle de Bernstein et al appliquée à des perturbations axisymétriques. Les outils mathématiques du chap. V permettent d'en déduire la condition suffisante[1] de stabilité axisymétrique suivante.

Considérons un équilibre MHD axisymétrique de pression $P(\psi)$ et de champ magnétique $B = \nabla\psi \times \frac{e_\phi}{r} + f(\psi)\frac{e_\phi}{r}$; notons, dans un plan méridien, Ω_p le plasma Ω_v le vide, Γ_p l'interface plasma-vide et Γ la paroi de la cavité. Un tel équilibre est axisymétriquement stable si $\mu_1 \geq 1$ où μ_1 est la première valeur propre du problème aux limites :

---

[1] il s'agit heuristiquement d'une C.N.S.

$$
(0.9)\qquad
\begin{cases}
\mathcal{L}u - r\,\dfrac{d}{dt}\,(\rho_1^{-1}(t)\gamma P(t)\,\dfrac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\dfrac{r\,d\sigma}{|\nabla\psi|})_{t=\psi(x)} \\
- \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d}{dt}\,(\rho_2^{-1}(t) f^2(t)\,\dfrac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\dfrac{d\sigma}{r|\nabla\psi|})_{t=\psi(x)} + G_- u = \mu G_+ u \text{ dans } \Omega_p, \\
u(x_o) = 0 \text{ pour } \nabla\psi(x_o) = 0, \\
u \text{ continu sur } \Gamma_p, \\
\text{une condition sur le saut de } \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \text{ à travers } \Gamma_p, \\
\mathcal{L}u = 0 \text{ dans } \Omega_v\ , \\
u = 0 \text{ sur } \Gamma\ ,
\end{cases}
$$

avec les notations : $x = (r,z)$,

$$\rho_1(t) = \int_{\psi=t} \frac{r\,d\sigma}{|\nabla\psi|}\ ,\ \rho_2(t) = \int_{\psi=t} \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\ ,$$

$$G(r,z) = rp''(\psi) + \frac{1}{r}\,(ff''(\psi) + f'^2(\psi)).$$

ANNEXE

VIII - *"Physique des plasmas : modules de calcul d'équilibres MHD axisymétriques"* Rapport MODULEF, janvier 82, 37 pages.

Cette brochure est un mode d'emploi de modules basés sur l'algorithme du Chap. III et destinés à simuler le confinement du plasma dans un TOKAMAK.

L'exemple numérique de cette brochure est original. Nous considérons une cavité Ω rectangulaire contenant deux bobinages ponctuels destinés à créer un plasma allongé terminé à chaque extrémité par une boucle (schématisation du dispositif ASDEX, RFA). Plusieurs changements de topologie sont observés suivant la valeur du courant dans les bobinages.

PARTIE PRELIMINAIRE

CHAPITRE I

Study of a Few Equations Based on the Hodgkin-Huxley Model

MICHEL SERMANGE
Laboria, Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150, Le Chesnay, France

Received 20 October 1976; revised 8 May 1977

ABSTRACT

The electrochemical equilibrium of some excitable membranes—the membrane of a nerve fiber or of a cardiac fiber—is determined by the solution of a system of partial differential equations coupled with a system of ordinary differential equations. The existence and uniqueness of the solution of this problem are established, and an *a priori* estimate of the solution is also given.

INTRODUCTION

In 1952, Hodgkin and Huxley proposed the first quantitative model of the axon [4]. Later, simpler models which seem to describe the qualitative behavior of the axon were formulated by Fitzhugh and Nagumo. Noble and, later on, Besseau emphasized the importance of the Hodgkin-Huxley equations: they have shown that by modifying these equations, it is possible to describe the complex behavior of the cardiac fibers. We propose to study, from the point of view of the existence and uniqueness of solutions, a class of equations which contains the Hodgkin-Huxley, Noble, and Besseau equations.

As far as we know, the mathematical results which are available at this time are the following: Evans and Shenk proved in 1970 the existence and uniqueness of strong solutions for the one-dimensional Hodgkin-Huxley equations [3]. Recently, Smoller and Rauch have studied the Fitzhugh and Nagumo equations and have obtained various results on existence and uniqueness [8, 9]. We mention here also an abstract theorem of L. Tartar [11] which is close to one of our results (see Remark 1.1), and a report of M. Mimura which gives a stable discretization scheme for the Hodgkin-Huxley equations [6].

© Elsevier North-Holland, Inc., 1977

In this paper, we present some new results by studying the weak solutions of the Hodgkin-Huxley equations and by considering a more general problem in an open subset of $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. This might allow a generalization from the fiber to cardiac tissue.[1]

In Sec. 1, we shall define the type of partial differential equations considered, and then we shall establish the existence and uniqueness of solutions for that class of problems. In Sec. 2, we shall verify that the Hodgkin-Huxley, Noble, and Besseau equations belong to this class, and we shall apply to them the general existence and uniqueness theorem.

1. A GENERAL EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREM

1.1. *STATEMENT OF THE PROBLEM AND OF THE MAIN THEOREM*

Let Ω be an open set in $\mathbb{R}^n$, and T be a positive real number. We denote by Q the cylinder $\Omega \times]0, T[$. We denote by $\mathcal{A}$ the differential operator such that: $\mathcal{A}y = -\Delta Ay$, where Δy is the Laplacian of a vector-valued function y and A is the matrix (N, N) with $N = p + q \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0_q \end{pmatrix}.$$

The system of ordinary differential equations coupled with partial differential equations to be considered is a generalization of the system of Hodgkin-Huxley equations [4], and is described as follows: We are looking for a function $y : Q \to \mathbb{R}^N$ such that

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + \frac{\partial y}{\partial t} &= g(y) && \text{in } Q, \\ Ay &= 0 && \text{on } \partial\Omega \times]0, T[, \\ y(0) &= y_0 && \text{on } \Omega. \end{aligned}$$

The function g mapping $\mathbb{R}^N$ into itself is given by $g(y) = f(y, y)$, where $f(x, y) = D(x)y + C(x)$; here $D(x)$ is a diagonal matrix, $C(x)$ is a vector. Moreover, the function f satisfies the following hypotheses:

H1. There exist $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \leqslant 0 \leqslant \beta$, such that

$$f(y, \alpha) \geqslant 0, \qquad f(y, \beta) \leqslant 0 \qquad \text{for} \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta.$$

H2. $g(0) = C(0) = 0$.

---

[1] A fiber is a linear element. A tissue is a tangle of fibers with numerous connections between them.

H3. C and D are locally Lipschitzian mappings from $\mathbb{R}^N$ into itself.[2]

For a more precise statement of the abovementioned problem, let us introduce some functional spaces. We denote respectively by V, H, V' the Sobolev spaces

$$\left(H_0^1(\Omega)\right)^p \times \left(L^2(\Omega)\right)^q, \quad \left(L^2(\Omega)\right)^N, \quad \left(H^{-1}(\Omega)\right)^p \times \left(L^2(\Omega)\right)^q.$$

$\mathbf{L}^2(\Omega)$ will denote either the space $\left(L^2(\Omega)\right)^q$ or the space $\left(L^2(\Omega)\right)^N$. $\mathbf{L}^2(\Omega)$ is equipped with the standard Hilbert scalar product, which is denoted by (u,v). V is equipped with the Hilbert scalar product

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{p} (\operatorname{grad} u_i, \operatorname{grad} v_i) + (u,v).$$

We also define a bilinear form on $V \times V$:

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{p} (\operatorname{grad} u_i, \operatorname{grad} v_i).$$

We know that the above spaces have the following properties: $V \subset H \subset V'$ with continuous injections, V is dense in H, H is dense in V', and V' is the dual of V; finally, V' is separable (cf. Lions [5]). Moreover, we introduce the space

$$W(0,T) = \left\{ y \in L^2(0,T;V),\ \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;V') \right\}.$$

We know (cf. Lions [5]) that

$$W(0,T) \subset \mathcal{C}^0([0,T];H) \qquad \text{with continuous injection.}$$

The maximum norm on $\mathcal{C}^0([0,T];H)$ is denoted by

$$|||\varphi||| = \sup_{0<t<T} |\varphi(t)|_H.$$

The basic space in the proof of existence, using the contraction mapping theorem, will be the space $\mathcal{C}^0([0,T];H)$.

We can now give a precise statement of

Problem 1. Find $y \in W(0,T) \cap \mathbf{L}^\infty(Q)$ such that

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + \frac{dy}{dt} &= g(y), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

[2] We identify diagonal matrices with elements of $\mathbb{R}^N$.

It follows from Lemma 1 below that if $y \in W(0,T) \cap \mathbf{L}^\infty(Q)$, then $g(y) \in \mathbf{L}^2(Q) = L^2(0,T;H)$, hence the first equality in (1) makes sense in $L^2(0,T;V')$.

Since $g(y) \in L^2(0,T;H)$, Problem 1 is equivalent to

Problem 1'. Find $y = (u,v) \in \mathbf{L}^2(Q) \cap \mathbf{L}^\infty(Q)$, with $\partial u/\partial x_i \in \mathbf{L}^2(Q)$, such that

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} &= g_1(y) && \text{in } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g_2(y) && \text{in } Q, \\ y(0) &= y_0 && \text{on } \Omega, \\ u &= 0 && \text{on } \partial\Omega \times]0,T[. \end{aligned} \tag{1'}$$

Our main result is the following:

THEOREM 1

Assume that g satisfies hypotheses H1, H2, *and* H3. *Let there be given* $y_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ *such that* $\alpha \leqslant y_0(\xi) \leqslant \beta$ *a.e.* $\xi \in \Omega$, *where* α *and* β *are fixed in* H1. *Then there exists one and only one solution y for Problem 1. Moreover, it satisfies*

$$\alpha \leqslant y(t,\xi) \leqslant \beta \qquad \forall t \in [0,T], \quad \text{a.e. } \xi \in \Omega.$$

1.2. *A LEMMA*

If y is an $\mathbf{R}^N$ vector-valued function defined on an open subset $\mathcal{O}$ of $\mathbf{R}^m$, then $g \circ y : \xi \mapsto g(y(\xi))$ is also an $\mathbf{R}^N$ vector-valued function defined on $\mathcal{O}$. We denote by $\tilde{g}$ the mapping $y \mapsto g \circ y$.

LEMMA 1

Let g be a mapping from $\mathbf{R}^N$ *into itself, locally Lipschitzian and such that* $g(0) = 0$. *Then the mapping* $\tilde{g} : y \mapsto g \circ y$ *maps* $\mathbf{L}^2(\mathcal{O}) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathcal{O})$ *into itself. Moreover,* $\tilde{g}$ *is Lipschitzian on every bounded set of* $\mathbf{L}^\infty(\mathcal{O})$, *both as a mapping of* $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$ *into itself and as a mapping of* $\mathbf{L}^\infty(\mathcal{O})$ *into itself.*

Proof. Let $y \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathcal{O})$ be given. We have

$$|y(\xi)| \leqslant |y|_\infty \qquad \text{a.e. } \xi \in \mathcal{O}.$$

Since g is Lipschitzian on the ball with center at 0 and radius $|y|_\infty$, there exists $M < \infty$ such that

$$|g(y(\xi))| = |g(y(\xi)) - g(0)| \leqslant M|y(\xi)| \qquad \text{a.e. } \xi \in \mathcal{O}.$$

This shows that $\tilde{g}(y) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathcal{O})$.

Now, let B be a bounded subset of $\mathbf{L}^\infty(\mathcal{O})$; there exists a bounded subset C of $\mathbf{R}^N$ such that for every $y \in B$, $y(\xi) \in C$ a.e. $\xi \in \mathcal{O}$. Indeed, we can include B in a ball of $\mathbf{L}^\infty(\mathcal{O})$ with center at 0 and radius R, and take for C the ball in $\mathbf{R}^N$ with center at 0 and radius R.

Then there exists $M = M(g, C)$ such that

$$x_1, x_2 \in C \quad \Rightarrow \quad |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|.$$

Hence

$$|g(y_1(\xi)) - g(y_2(\xi))| \leqslant M|y_1(\xi) - y_2(\xi)| \qquad \text{a.e. } \xi \in \mathcal{O}.$$

Therefore

$$|\tilde{g}(y_1) - \tilde{g}(y_2)|_{\mathbf{L}^2} \leqslant M|y_1 - y_2|_{\mathbf{L}^2},$$

and

$$|\tilde{g}(y_1) - \tilde{g}(y_2)|_{\mathbf{L}^\infty} \leqslant M|y_1 - y_2|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

Thus the lemma is proved.

Let us return to the hypotheses of Theorem 1. Hypothesis H3 shows that the mapping $g(y) = D(y)y + C(y)$ is locally Lipschitzian of $\mathbf{R}^N$ into itself. Then Lemma 1 is applicable. The open set $\mathcal{O}$ will be either Ω or Q.

We can now establish the existence and uniqueness of a solution of problem 1.

1.3. *PROOF OF UNIQUENESS*

Let y_1, y_2 be two solutions; then $y = y_1 - y_2$ satisfies

$$\mathcal{A}y + \frac{dy}{dt} = g(y_1) - g(y_2).$$

We take the scalar product, in the duality $V - V'$, with $y(t)$:

$$a(y(t), y(t)) + \left\langle \frac{dy}{dt}, y(t) \right\rangle = (g(y_1) - g(y_2), y).$$

Since $y \in W(0, T)$, we have

$$\left\langle \frac{dy}{dt}, y \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y(t)|^2.$$

Since $y_1(t), y_2(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ and $y_1, y_2 \in \mathbf{L}^\infty(Q)$, Lemma 1 gives

$$|g(y_1(t)) - g(y_2(t))| \leqslant M|y(t)|,$$

where M does not depend on t. Therefore we have

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y(t)|^2 \leqslant M|y(t)|^2.$$

According to Gronwall's lemma, we have finally

$$|y(t)|^2 \leqslant |y(0)|^2 e^{2Mt} = 0.$$

This completes the proof of uniqueness.

1.4. *PROOF OF EXISTENCE*

We introduce the space

$$E(0,T) = \{ y \in \mathcal{C}^0([0,T];H),\ \alpha \leqslant y(t,\xi) \leqslant \beta\ \forall t \in [0,T],\ \text{a.e. } \xi \in \Omega \}.$$

$E(0,T)$ equipped with the $|||\cdot|||$ norm is a complete metric subspace of $\mathcal{T}^0([0,T];H)$. Of course, it is not a vector space. We are going to define a nonlinear operator $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} : E(0,T) \to W(0,T)$$
$$x \mapsto y,$$

where $y = \mathcal{T}x$ will be the solution of the following linear problem.

Problem 2. Find $y \in W(0,T)$ such that

$$\mathcal{A}y + \frac{dy}{dt} = f(x,y),$$
$$y(0) = y_0. \qquad (2)$$

We shall prove that $\mathcal{T}(E(0,T)) \subset W(0,T) \cap E(0,T)$; then looking for a solution of Problem 1 such that $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ will be equivalent to looking for a fixed point of $\mathcal{T}$ in $E(0,T)$.

We are going to establish successively that there exists a unique solution $y \in W(0,T) \cap E(0,T)$ of Problem 2 and that $\mathcal{T}$ is a contraction operator in $E(0,T)$ for $T \leqslant T_1$, T_1 independent of y_0. Then we shall be able to use the fixed-point theorem for contraction mappings.

In a first step, we establish

STATEMENT 1.

There exists a unique solution y of Problem 2. Therefore we can define the operator $\mathcal{T}$ of $E(0,T)$ into $W(0,T)$ by setting $y = \mathcal{T}x$.

Proof. We can write Eq. (2) in the following form:

$$\left[\mathcal{A} - D(x(t))\right] y + \frac{dy}{dt} = C(x(t)). \tag{3}$$

We verify now that we can apply a standard theorem of existence and uniqueness for parabolic problems (cf. Lions [5], pp. 114–120). First we study the family of bilinear forms on $V \times V$:

$$b(t;\varphi,\psi) = a(\varphi,\psi) - \big(D(x(t))\varphi,\psi\big).$$

Since $E(0,T)$ is a bounded subset of $\mathbf{L}^\infty(Q)$ and since D is a continuous function on $\mathbf{R}^N$, the function $(t,\xi) \mapsto D(x(t,\xi))$ belongs to $\mathbf{L}^\infty(Q)$. Hence $t \mapsto b(t;\varphi,\psi)$ is measurable. It also follows that there exists some constant M such that

$$\left|D(x(t))\right|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leqslant M \qquad \text{a.e. } t \in]0,T[.$$

Hence

$$\begin{aligned} |b(t;\varphi,\psi)| &\leqslant |a(\varphi,\psi)| + M|\varphi|\,|\psi| \\ &\leqslant \max(1,M)\,\|\varphi\|\,\|\psi\|. \end{aligned}$$

With $\lambda = M + 1$, we also have

$$\begin{aligned} b(t;\varphi,\varphi) + \lambda|\varphi|^2 &\geqslant a(\varphi,\varphi) - M|\varphi|^2 + \lambda|\varphi|^2, \\ &\geqslant \|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

because of the identity $\|\varphi\|^2 = a(\varphi,\varphi) + |\varphi|^2$.

Then we consider the right-hand side of the equation (3). Since $g(0) = C(0) = 0$, we can apply Lemma 1, and we obtain $C(x(\cdot)) \in L^2(0,T;H)$.

Finally, $y_0 \in H$ by assumption. Therefore there exists a unique solution $y \in W(0,T)$, and we can define the operator $\mathcal{T}$.

In a second step, we prove

STATEMENT 2.

The operator $\mathcal{T}$ maps $E(0,T)$ into itself.

The contraction mapping theorem is proved by a successive-approximation method. So Statement 2 is an essential condition for the application of this theorem.

First we establish

LEMMA 2.

If $y \in W(0,T)$ and $\alpha \leqslant 0$, then $(y-\alpha)^- \in W(0,T)$.

This result is a standard one for $\alpha=0$. For $\alpha\neq 0$, the only difficulty is to prove that $(y-\alpha)^- \in \mathbb{L}^2(Q)$, even if $(y-\alpha)\notin \mathbb{L}^2(Q)$. But for each component y_i, we have the following inequality:

$$0 \leqslant (y-\alpha)_i^- \leqslant |y_i| \qquad \text{a.e. in } Q,$$

and Lemma 2 follows.

Let us now establish Statement 2. We write (2) in the variational form: $\forall z \in W(0,T)$,

$$a(y-\alpha, z(t)) + \left\langle \frac{d}{dt}(y-\alpha), z \right\rangle = (f(x,y), z(t)).$$

We take $z=(y-\alpha)^- \in W(0,T)$ and obtain

$$a\big(y-\alpha,(y-\alpha)^-\big) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|(y-\alpha)^-\big|^2 = \big(f(x,y),(y-\alpha)^-\big). \tag{4}$$

On the other hand, we have the identity

$$f(x,y) = f(x,\alpha) + D(x)(y-\alpha). \tag{5}$$

Since A and D are diagonal matrices, using a result of G. Stampacchia [10], we see that

$$a\big(y-\alpha,(y-\alpha)^-\big) = -a\big((y-\alpha)^-,(y-\alpha)^-\big) \leqslant 0 \tag{6}$$

and

$$D(x)(y-\alpha)\cdot(y-\alpha)^- = -D(x)(y-\alpha)^-\cdot(y-\alpha)^-.$$

This last function of ξ is integrable on Ω, as the function of $\xi \mapsto f(x(t,\xi),y(t,\xi))\cdot(y(t,\xi)-\alpha)^-$. Thus we can use the identity (5) to split the right-hand side of (4) into the sum of two integrals.

Since $x \in E(0,T)$, hypothesis H1 shows that

$$f(x(t,\xi),\alpha) \geqslant 0 \qquad \forall t \in [0,T], \quad \text{a.e. } \xi \in \Omega. \tag{7}$$

Finally, with M defined in the proof of Statement 1 and with the inequalities (6) and (7), (4) implies

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|(y-\alpha)^-\big|^2 \leqslant M\big|(y-\alpha)^-\big|^2.$$

Because of Gronwall's lemma and the hypothesis $y_0 \geqslant \alpha$, the above inequality implies that $|(y-\alpha)^-(t)|=0\ \forall t\in[0,T]$. The same result can be obtained for $(y-\beta)^+$. This proves Statement 2.

Finally, in a third step, we prove

STATEMENT 3.

There exists $T_1=T(f,\alpha,\beta)$ such that the operator $\mathcal{T}$ is a contraction of $E(0,T_1)$ into itself.

Proof. Hypothesis H3 implies that the function $(x,y)\mapsto f(x,y)=D(x)y+C(x)$ is locally Lipschitzian from $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$ into $\mathbf{R}^N$. We denote by $M=M(f,\alpha,\beta)$ the Lipschitz constant of f on the following bounded subset K of $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$:

$$K=\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N \mid \alpha\leqslant y_1\leqslant\beta,\ \alpha\leqslant y_2\leqslant\beta\}.$$

The norm on $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$ is the Euclidian norm.

Now let $x_1,x_2\in E(0,T)$, and y_1,y_2 be their images by $\mathcal{T}$. Put $x=x_1-x_2$, $y=y_1-y_2$; y satisfies the equation

$$\mathcal{A}y+\frac{dy}{dt}=f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2).$$

We take the scalar product, in the duality $V-V'$, with $y(t)$:

$$a(y(t),y(t))+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y(t)|^2=(f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2),y).$$

Since $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in E(0,T)\times E(0,T)$, by applying Lemma 1 we obtain

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M\left\{|x(t)|^2+|y(t)|^2\right\}^{1/2}.$$

Hence

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y(t)|^2\leqslant M\left\{|x(t)|^2+|y(t)|^2\right\}^{1/2}|y(t)|,$$

and

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y(t)|^2\leqslant M\left\{|x(t)|^2+|y(t)|^2\right\}.$$

Thus

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y(t)|^2\leqslant M\left\{|y(t)|^2+|||x|||^2\right\}.$$

We apply Gronwall's lemma with $y(0)=0$ and obtain

$$|y(t)|^2 \leqslant (e^{2Mt}-1)|||x|||^2.$$

Therefore

$$|||\mathcal{T}x_1-\mathcal{T}x_2||| \leqslant (e^{2MT}-1)^{1/2}|||x_1-x_2|||.$$

Obviously there exists T_1 such that $(e^{2MT_1}-1)^{1/2}<1$, and T_1, like M, depends only on f,α,β. In particular, T_1 does not depend on y_0.

Proof of Theorem 1 (existence). We can apply the contraction mapping theorem to the operator $\mathcal{T}$ from $E(0,T_1)$ into $E(0,T_1)\cap W(0,T_1)$. Then we can repeat the argument on the intervals $[T_1,2T_1]$, etc., since $y_i\in E(T_i,T_{i+1})$ implies that $\alpha \leqslant y_i(T_{i+1}) \leqslant \beta$ a.e. in Ω. The function y successively defined on the intervals $[T_i,T_{i+1}]$, $i=0,\ldots,$ is a solution of Eq. (1) and satisfies $y\in W(0,T)\cap \mathbf{L}^\infty(Q)$. The proof of Theorem 1 is now complete.

Remark 1.1. L. Tartar [11] proves a result similar to Theorem 1 with assumptions on g which are slightly different but actually equivalent to those given here. His hypotheses are that $g(0)=0$, g is smooth (for convenience), and there exist $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^N$, $\alpha\leqslant 0\leqslant\beta$, such that for every $i=1,\ldots,N$,

$$g_i(y_1,\ldots,y_{i-1},\alpha_i,y_{i+1},\ldots,y_N)\geqslant 0,$$

$$g_i(y_1,\ldots,y_{i-1},\beta_i,y_{i+1},\ldots,y_N)\leqslant 0$$

for every $y\in\mathbb{R}^N$ such that $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$.

Remark 1.2. In [12], Weinberger studies in a general context the invariant sets for parabolic or elliptic systems, and in [2] Conley, Chueh, and Smoller study such sets for nonlinear diffusion equations.

2. MAIN EXAMPLES

2.1. *HODGKIN-HUXLEY EQUATIONS*

Let Ω be the interval $]a,b[$, where $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$; T is a positive real number, and Q is $\Omega\times]0,T[$. We give a weak formulation of the Hodgkin-Huxley equations [4].

Problem 2.1. Find a function $y=(u,v)$ with $u\in L^2(Q)\cap L^\infty(Q)$, $\partial u/\partial x \in L^2(Q)$, $v-\gamma\in(L^2(Q)\cap L^\infty(Q))^3$ such that

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t} &= -v_1^3 v_3(u-C_1^*)-v_2^4(u-C_2^*)-(u-C_0^*),\\ \frac{\partial}{\partial t}v_i &= -\left[\alpha_i(u)+\beta_i(u)\right]v_i+\alpha_i(u) \quad \text{in } Q, \quad 1\leqslant i\leqslant 3,\\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega\times]0,T[,\\ u(0)&=u_0, \quad v(0)=v_0 \qquad \text{on } \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

The functions α_i,β_i are given functions of class C^∞ from $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}_+^*$. In the applications, the function α_i,β_i are usually chosen as follows:

$$h(x)=e^{ax+b}, \quad \text{where} \quad a,b\in\mathbf{R},$$

or

$$h(x)=c\frac{ax+b}{e^{ax+b}-1}, \qquad \text{where} \quad a,b\in\mathbf{R}, \quad c\in\mathbf{R}_+^*,$$

or

$$h(x)=\frac{c}{1+e^{ax+b}}, \qquad \text{where} \quad a,b\in\mathbf{R}, \quad c\in\mathbf{R}_+^*.$$

The C_i^* which appear in (2.1) are three real constants which satisfy the compatibility relation

$$C_1^*\gamma_1^3\gamma_3+C_2^*\gamma_2^4+C_0^*=0.$$

We have set $\gamma_i=\alpha_i(0)/[\alpha_i(0)+\beta_i(0)]$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, and $\tilde{\gamma}=(0,\gamma)$. We set $u_m=\min_i C_i^*$, $u_M=\max_i C_i^*$.

Remark 2.1. The compatibility relation implies that the reference potential 0 is the resting potential, i.e., $\tilde{\gamma}$ is a constant solution of the system (2.1).

We are going to establish

THEOREM 2.1

Let there be given $u_0\in L^2(\Omega)$, $v_0\in\gamma+(L^2(\Omega))^3$ such that $u_m\leqslant u_0\leqslant u_M$, $0\leqslant v_0\leqslant 1$ a.e. in Ω. Then there exists one and only one solution to Problem 2.1. Moreover, $u_m\leqslant u(t,\xi)\leqslant u_M$, $0\leqslant v(t,\xi)\leqslant 1$ $\forall t\in[0,T]$, a.e. $\xi\in\Omega$.

Proof. We denote by g the function from $\mathbf{R}^4$ into itself which assigns the right-hand side of Eq. (2.1) to $y=(u,v)\in\mathbf{R}^4$. We define $f(y,y')$ to be the vector-valued function with components

$$f_0(y,y') = -v_1^3 v_3(u'-C_1^*) - v_2^4(u'-C_2^*) - (u'-C_0^*),$$

$$f_i(y,y') = -\left[\alpha_i(u)+\beta_i(u)\right]v_i' + \alpha_i(u), \qquad 1\leqslant i\leqslant 3,$$

where $y=(u,v)$, and $y'=(u',v')$.

We do not apply Theorem 1 directly, but only after we perform the change of unknown function $Y(x,t)=y(x,t)-\tilde{\gamma}$. The right-hand side of the equation in Y is given by $G(Y)=g(Y+\tilde{\gamma})$. So we define $F(Y,Y')=f(Y+\tilde{\gamma},Y'+\tilde{\gamma})$.

It is immediate that $G(Y)$ is equal to $F(Y,Y)$, that $F(Y,Y')$ is affine with respect to Y', and that the linear term is diagonal. The assertion $G(0)=0$ is a consequence of the compatibility relation, it is clear from the regularity of α_i and β_i that condition H3 is satisfied.

Now we set[3] $\alpha=(u_m,-\gamma)$, $\beta=(u_M,1-\gamma)$. We remark that the compatibility relation implies $u_m\leqslant 0\leqslant u_M$, and hence $\alpha\leqslant 0\leqslant\beta$. Let us assume that $Y\in\mathbf{R}^4$, $\alpha\leqslant Y\leqslant\beta$. This is equivalent to $u_m\leqslant u\leqslant u_M$ and $0\leqslant v_i\leqslant 1$, where $y=Y+\tilde{\gamma}$ and $y=(u,v)$. We have

$$F_0(Y,\alpha) = -v_1^3 v_3(u_m-C_1^*) - v_2^4(u_m-C_2^*) - (u_m-C_0^*)\geqslant 0,$$

since $v_i\geqslant 0$ and $u_m\leqslant C_i^*$.

$$F_i(Y,\alpha)=\alpha_i(u)\geqslant 0$$

by the hypothesis on the function α_i. We have proved that $F(Y,\alpha)\geqslant 0$. In the same way, it can be proved that $F(Y,\beta)\leqslant 0$.

Therefore, the conditions of Theorem 1 are met, and we obtain Theorem 2.1 after reverting to the function y.

2.2. *NOBLE EQUATIONS*

Let Ω be the interval $]a,b[$, where $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$; T be a positive real number; and Q be $\Omega\times]0,T[$.

We give a weak formulation of Noble equations with propagation [7].

Problem 2.2. Find a function $y=(u,v)$ with $u\in L^2(Q)\cap L^\infty(Q)$, $\partial u/\partial x$

[3]Note carefully that there is no relation between the functions α_i,β_i and the two vectors α,β, whose components are never explicitly used.

$\in L^2(Q)$, $v-\gamma\in\big(L^2(Q)\cap L^\infty(Q)\big)^3$ such that

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=-v_1^3v_3(u-C_1^*)-v_2^4(u-C_2^*)\,\alpha_0(u)(u-C_0^*),\\
&\frac{\partial}{\partial t}v_i=-\big[\alpha_i(u)+\beta_i(u)\big]v_i+\alpha_i(u)\quad\text{in } Q,\qquad 1\leqslant i\leqslant 3,\\
&u=0\qquad\text{on } \partial\Omega\times]0,T[,\\
&u(0)=u_0,\quad v(0)=v_0\qquad\text{on } \Omega.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

The functions $\alpha_0,\alpha_i,\beta_i$ are C^∞ from $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}_+^*$; the C_i^* are real constants which satisfy the compatibility relation

$$C_1^*\gamma_1^3\gamma_3+C_2^*\gamma_2^4+\alpha_0(0)C_0^*=0.$$

Since $\alpha_0(x)\geqslant 0\ \forall x\in\mathbf{R}$, the previous proof is still valid and we have

THEOREM 2.2

Let there be given $u_0\in L^2(\Omega)$, $v_0\in\gamma+\big(L^2(\Omega)\big)^3$ such that $u_m\leqslant u_0\leqslant u_M$, $0\leqslant v_0\leqslant 1$ a.e. in Ω. Then there exists one and only one solution for Problem 2.2. Moreover, $u_m\leqslant u(t,\xi)\leqslant u_M$, $0\leqslant v(t,\xi)\leqslant 1\ \forall t\in[0,T]$, a.e. $\xi\in\Omega$.

2.3. *BESSEAU EQUATIONS*

Let Ω be the interval $]a,b[$, where $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$; T be a positive real number; and Q be $\Omega\times]0,T[$.

We give a weak formulation of Besseau equations with propagation [1].

Problem 2.3. Find a function $y=(u,v)$ with

$$u\in L^2(Q)\cap L^\infty(Q),\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\in L^2(Q),\qquad v-\gamma\in\big(L^2(Q)\cap L^\infty(Q)\big)^5$$

such that

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=-v_1^3v_4(u-C_1^*)-v_2^3v_5(u-C_2^*)-v_3(u-C_3^*)-\alpha_0(u)(u-C_0^*),\\
&\frac{\partial}{\partial t}v_i=-\big[\alpha_i(u)+\beta_i(u)\big]v_i+\alpha_i(u)\quad\text{in } Q,\qquad 1\leqslant i\leqslant 5,\\
&u=0\qquad\text{on } \partial\Omega\times]0,T[,\\
&u(0)=u_0,\quad v(0)=v_0\qquad\text{on } \Omega.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

The functions $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ are C^∞ of $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}_+^*$; the C_i^* are real constants which satisfy the compatibility relation

$$C_1^* \gamma_1^3 \gamma_4 + C_2^* \gamma_2^3 \gamma_5 + C_3^* \gamma_3 + C_0^* \alpha_0(0) = 0.$$

With the same proof as before, we obtain

THEOREM 2.3

Let there be given $u_0 \in L^2(\Omega)$, $v_0 \in \gamma + (L^2(\Omega))^5$ *such that* $u_m \leqslant u_0 \leqslant u_M$, $0 \leqslant v_0 \leqslant 1$ *a.e. in* Ω. *Then there exists one and only one solution to Problem 2.3. Moreover* $u_m \leqslant u(t,\xi) \leqslant u_M$, $0 \leqslant v(t,\xi) \leqslant 1$ $\forall t \in [0,T]$, *a.e.* $\xi \in \Omega$.

2.4. *GENERALIZATION OF THE THREE PREVIOUS SYSTEMS*

Finally, we can give a system where the propagation term is a generalization to dimension n of the cable propagation term and where the number of functions v_i is arbitrarily large.

We denote by Ω an open set of $\mathbf{R}^n$, and let T be a positive real number and $Q = \Omega \times]0,T[$. We let integers r,s be integers such that $r \geqslant s+1$. Then we state the following problem.

Problem 2.4. Find a function $y = (u,v)$ with

$$u \in L^2(Q) \cap L^\infty(Q), \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(Q), \qquad v - \gamma \in \left(L^2(Q) \cap L^\infty(Q)\right)^{r+s}$$

such that

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{s} g_i(v_i, v_{i+r})(u - C_i^*) \\ &\quad - \sum_{i=s+1}^{r} g_i(v_i)(u - C_i^*) - \alpha_0(u)(u - C_i^*), \\ \frac{\partial}{\partial t} v_i &= -(\alpha_i(u) + \beta_i(u)) v_i + \alpha_i(u) \quad \text{in } Q, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r+s, \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(0) &= u_0, \quad v(0) = v_0 \qquad \text{on } \Omega. \end{aligned} \tag{2.4}$$

The functions $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ are C^∞ from $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}_+^*$, the g_i are unitary monomials, and the C_i^* are real constants which satisfy the compatibility relation

$$\sum_{i=1}^{s} C_i^* g_i(\gamma_i, \gamma_{i+r}) + \sum_{i=s+1}^{r} C_i^* g_i(\gamma_i) + C_0^* \alpha_0(0) = 0.$$

We prove in the same way as before.

THEOREM 2.4

Let there be given $u_0 \in L^2(\Omega)$, $v_0 \in \gamma + (L^2(\Omega))^{r+s}$ *such that* $u_m \leqslant u_0 \leqslant u_M$, $0 \leqslant v_0 \leqslant 1$ *a.e. in* Ω. *Then there exists one and only one solution for Problem 2.4. Moreover,* $u_m \leqslant u(t,\xi) \leqslant u_M$, $0 \leqslant v(t,\xi) \leqslant 1$ $\forall t \in [0,T]$, *a.e.* $\xi \in \Omega$.

Remark 2.2. Theorems 2.1, 2.2, 2.3 still hold with a Neumann boundary condition $\partial u/\partial v = 0$. This condition means that the fiber extremities are free.

3. CONCLUSION

Since a physical fiber has a finite length, the hypotheses of the above theorems become: Let u_0, v_0 be measurable functions on Ω such that $u_m \leqslant u_0 \leqslant u_M$, $0 \leqslant v_0 \leqslant 1$ a.e. in Ω. Therefore they match the physical hypotheses. On the other hand the boundary conditions which we have considered do not represent the whole situation. A systematic study of all boundary conditions will be made later.

The author thanks Professor R. Temam for directing this work. The problems studied here arose in relation to present work on the cardiac fiber. The author is grateful to Professor E. Coraboeuf and his group[4] *for calling these problems to Professor Temam's attention.*

REFERENCES

1 A. Besseau, Analyse selon le modèle de Hodgkin-Huxley des conductances de la membrane myocardique de grenouille, Thèse de doctorat ès-Sciences Naturelles, archives CNRS 5839, Poitiers, 1971.

2 K. Chueh, C. Conley and J. Smoller, Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. *Indiana J. of Math.*. **26**, 373–392 (1977).

3 J. Evans and N. Shenk, Solutions to axon equations, *Biophys. J.* **10**, 1090–1101 (1970).

4 A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.* **117**, 500–544 (1952).

5 J. L. Lions, Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1968; English transl., Springer, Berlin, 1971.

6 M. Mimura, Finite difference method for a class of semilinear degenerate parabolic systems related to physical and biological problems, Report, Univ. of Kyoto, 1973.

7 D. Noble, A modification of the Hodgkin-Huxley equations applicable to Purkinje fiber action and pacemaker potentials, *J. Physiol.* **160**, 317–352 (1962).

8 J. Rauch, Global existence for the Fitzhugh-Nagumo equations, *Commun. Partial Differ. Equations* **1**, 609–621 (1976).

---

[4]Laboratoire de Physiologie Comparée, Université d'Orsay, France.

9 J. Rauch and J. Smoller, Qualitative theory of the Fitzhugh-Nagumo equations; *Adv. Math.*, to be published.
10 G. Stampacchia, *Equations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus*, Presses de l'Univ. de Montréal, 1966.
11 L. Tartar, Quelques remarques sur les systèmes semi-linéaires, in *Proceedings of IRIA-Novosibirsk Colloquium, June 1976*, Dunod, to be published.
12 H. F. Weinberger, Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems, *Rend. Mat. Univ. Roma (VI)*, **8** (1), 295–310 (1975).

PREMIERE PARTIE

EQUATIONS D'EQUILIBRES

CHAPITRE II

Appl. Math. Optim. 5, 127–151 (1979)

Applied Mathematics and Optimization

Une méthode numérique en bifurcation—application à un problème à frontière libre de la physique des plasmas

M. Sermange

Institut de Recherche en Informatique et Automatique, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 Le Chesnay, France.

Communicated by Roger Temam

Résumé. Une nouvelle méthode qui généralise l'algorithme standard des approximations successives est développée en vue de déterminer les points fixes (x^*) d'opérateurs qui admettent une dérivée de Fréchet (A) en x^* (seulement) telle que $A-I$ soit injectif. Cette méthode peut être appliquée en particulier au calcul des solutions de problèmes non linéaires au-delà d'un point de bifurcation, ce qui fait l'objet de la première partie. On explicite ensuite dans la deuxième partie l'application de cette méthode à un problème à frontière libre intervenant en physique des plasmas.

Abstract. A new method extending the standard successive approximation algorithm is developed for the determination of fixed points (x^*) of operators having a Frechet-derivative (A) at x^* (but not everywhere) such that $A-I$ is injective. This method can specially be applied to compute solutions of nonlinear problems past a point of bifurcation (first part). The application of this method to a free boundary value problem arising in plasma physics is then given in a second part.

1. Une méthode numérique en bifurcation

1.1. Introduction

Dans cette première partie, nous développons un algorithme local de détermination de point fixe, introduit par B. Marder et H. Weitzner [16], qui généralise l'algorithme standard des approximations successives. Il s'agit de trouver les points fixes x d'une application T d'un espace de Banach dans lui-même:

$$Tx = x.$$

0095-4616/79/0005-0127$05.00
©1979 Springer-Verlag New York Inc.

L'algorithme proposé par ces auteurs est le suivant. On se donne un réel $\alpha>0$ et on construit par récurrence une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en déterminant x^{n+1} par:

$$x^{n+\frac{1}{3}} = T(x^n),$$

$$x^{n+\frac{2}{3}} = T(x^{n+\frac{1}{3}}), \qquad (1.1)_\alpha$$

$$x^{n+1} = (1-\alpha)x^n + 2\alpha x^{n+\frac{1}{3}} - \alpha x^{n+\frac{2}{3}}.$$

Pour autant que nous sachions, la convergence de cet algorithme n'a été démontrée que dans le cas des espaces de dimension finie. Nous établissons ici la convergence dans une situation assez générale, en dimension infinie, avec en particulier des hypothèses très faibles de régularité sur T. Nous nous plaçons dans un espace de Banach de dimension infinie, nous supposons que x^* est un point fixe de T, que l'opérateur T de X dans lui-même admet une dérivée de Fréchet A en x^*[1], que l'opérateur A est compact, de valeurs propres réelles et différentes de 1. L'outil mathématique essentiel ici est un théorème de point fixe attractif de J. W. Kitchen [12].

Dans le cas où certaines valeurs propres de A sont supérieures à 1, on a ainsi la possibilité de calculer des points fixes de T qui ne peuvent pas être calculés par la méthode des approximations successives standard. Cet algorithme peut donc en particulier être utilisé pour calculer les solutions de problèmes non linéaires au-delà d'un point de bifurcation.

Citons d'autres méthodes numériques en bifurcation: C. Bolley [2], M. Fujii et M. Tabata [7], H. B. Keller [10], F. Kikuchi [11], R. Lozi [15]. Parmi ces méthodes, celles qui sont destinées au calcul des solutions après un point de bifurcation ne semblent pas applicables dans le cas d'hypothèses de régularité aussi faibles que les nôtres. Pour appliquer la méthode de Newton, par exemple, il faut un opérateur T deux fois différentiable. Les autres méthodes citées sont destinées à changer de branche en un point de bifurcation, ou à franchir un point de retournement.

Nous complétons cette première partie par l'application de la méthode à une équation aux dérivées partielles semi-linéaire assez générale.

1.2. Le résultat principal

Soient X un espace de Banach réel et T une application continue de X dans lui-même dont on cherche les points fixes.

On se donne un réel α strictement positif et on construit par récurrence une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X. On part d'un élément $x^0\in X$ quelconque et,

[1] en x^* et non en tout point de X.

l'élément x^n étant connu, on détermine x^{n+1} en trois pas

$$\begin{aligned} x^{n+\frac{1}{3}} &= T(x^n), \\ x^{n+\frac{2}{3}} &= T(x^{n+\frac{1}{3}}), \\ x^{n+1} &= (1-\alpha)x^n + 2\alpha x^{n+\frac{1}{3}} - \alpha x^{n+\frac{2}{3}}. \end{aligned} \qquad (1.1)_\alpha$$

La continuité de T entraîne le résultat de consistance suivant. S'il existe $x^* \in X$ tel que, pour $n \to \infty$, $x^n \to x^*$ et $x^{n+\frac{1}{3}} \to x^*$ dans X, alors x^* est un point fixe de T. Par contre, la seule hypothèse: $x^n \to x^*$ dans X, ne permet pas en général de conclure que x^* est un point fixe de T.

Le résultat principal est le résultat de convergence suivant:

Théorème 1.1. *Supposons que*:

i) $x^* \in X$ *est un point fixe de* T;

ii) T *est Fréchet différentiable en* x^*, *de dérivée notée* A;

iii) *Le complexifié de* A *est compact, de valeurs propres réelles et différentes de* 1.

Alors, pour tout α, $0 < \alpha < \alpha^*$, α^* *assez petit*[1], *il existe un voisinage* V_α *de* x^* *tel que, si* $x^0 \in V_\alpha$ *et si* (x^n) *est définie par* $(1.1)_\alpha$, *alors pour* $n \to \infty$

$$x^{n+\frac{i}{3}} \to x^* \text{ dans } X, \quad i = 0, \quad 1, \quad 2. \qquad \square$$

Démonstration. Pour $\alpha > 0$ quelconque, on définit le polynôme:

$$p_\alpha(y) = 1 - \alpha + 2\alpha y - \alpha y^2 = 1 - \alpha(1-y)^2,$$

et l'opérateur U_α de X dans lui-même[2]:

$$U_\alpha = (1-\alpha)I + 2\alpha T - \alpha T^2.$$

La suite (x^n) définie par $(1.1)_\alpha$ est ainsi donnée par:

$$x^{n+1} = U_\alpha x^n.$$

Grâce à i), x^* est un point fixe de U_α et grâce à la règle de composition des dérivations et à i), ii), l'opérateur U_α est Fréchet différentiable en x^*, de dérivée B_α:

$$B_\alpha = p_\alpha(A).$$

---

[1] La valeur de α^* est donnée au cours de la démonstration.

[2] U_α est différent de $I - \alpha(I-T)^2$ puisque T est non linéaire.

Notant $\tilde{B}_\alpha$ et $\tilde{A}$ les opérateurs complexifiés, puisque $\tilde{A}^2=(\tilde{A})^2$, on a encore:

$$\tilde{B}_\alpha = p_\alpha(\tilde{A}).$$

On en déduit par le théorème de l'application spectrale (cf. M. Schechter [20]) que

$$\mathrm{Sp}(\tilde{B}_\alpha) = p_\alpha(\mathrm{Sp}(\tilde{A})),$$

où Sp désigne le spectre. On sait que le spectre d'un opérateur continu est un ensemble compact de $\mathbb{C}$ et que le spectre d'un opérateur compact coïncide, à zéro près, avec son spectre ponctuel (cf. J. Dieudonne [6]). Grâce à iii), on en déduit que $S=\mathrm{Sp}(\tilde{A})$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 1.

Or il est facile de vérifier que, pour un ensemble S compact dans $\mathbb{R}$ ne contenant pas 1, il existe α^* tel que, pour tout α, $0<\alpha<\alpha^*$, on ait

$$\sup_{y\in S} |p_\alpha(y)| < 1$$

$$\left(\alpha^*=2/b^2 \text{ où } b=\sup_{y\in S}|1-y|\right).$$

Par définition du rayon spectral (noté r), on en déduit que pour de telles valeurs de α

$$r(\tilde{B}_\alpha) < 1.$$

L'opérateur U_α et son point fixe x^* vérifient ainsi les conditions d'application du théorème suivant (cf. [12]).

Théorème de J. W. Kitchen. *Soit T un opérateur de X dans lui-même tel que*

i) *$x^*\in X$ est un point fixe de T;*

ii) *T est Fréchet différentiable en x^*;*

iii) *le rayon spectral du complexifié de la dérivée de T en x^* est strictement plus petit que* 1.

Alors il existe un voisinage V de x^* tel que pour tout $x^0\in V$, on ait pour $n\to\infty$

$$T^n(x^0)\to x^* \text{ dans } X$$ □

On en déduit la convergence, pour $n\to\infty$, de $x^n\to x^*$ dans X.

La continuité de T entraîne, pour $n\to\infty$,

$$x^{n+\frac{i}{3}}\to x^* \quad \text{dans } X, \qquad i=1,2,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.1. □

Remarque 1.1. Soit p un polynôme de degré $m(m\geqslant 1)$

$$p(y)=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i y^i, \quad \alpha_i\in\mathbb{R},$$

vérifiant

$$p(1) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1.$$

On peut définir l'algorithme suivant, qui généralise l'algorithme $(1.1)_\alpha$ ainsi que l'algorithme standard des approximations successives:

$$x^{n+1} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i T^i x^n, \quad (T^0 = I). \tag{1.2}$$

On montre comme précédemment que l'algorithme converge si $p(\mathrm{Sp}(\tilde{A})) \subset]-1, 1[$, cette inclusion n'étant possible que pour $m \geqslant 2$ lorsque 1 appartient à l'enveloppe convexe de $\mathrm{Sp}(\tilde{A})$. Dans le cas de l'algorithme $(1.1)_\alpha$, on montre que le minimum du rayon spectral de $p_\alpha(\tilde{A})$ est

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2},$$

où $a = \inf_{y \in S} |1 - y|$, et qu'il est atteint en $\alpha_* = \dfrac{2}{a^2 + b^2}$. Pour l'algorithme (1.2) on a davantage de degrés de liberté et on peut diminuer ce rayon spectral si on connaît à l'avance la localisation du spectre de $\tilde{A}$, et donc améliorer la convergence de l'algorithme.

1.3 Application et exemple

On se place d'abord dans le cadre d'un problème de la théorie de la bifurcation, en choisissant des hypothèses de régularité très faibles, et on explicite l'application de l'algorithme $(1.1)_\alpha$. On donne ensuite l'exemple d'une équation elliptique semi-linéaire assez générale.

Soient X un espace de Banach de dimension infinie, F et T des applications continues de $[-1, 1] \times X$ dans X avec $F(\lambda, x) = x - T(\lambda, x)$. Pour λ fixé, on s'intéresse à l'équation en x:

$$F(\lambda, x) = 0,$$

ou encore

$$T(\lambda, x) = x.$$

Soit x une application de classe C^1 de $[-1, 1]$ dans X telle que $F(\lambda, x(\lambda)) = 0$ pour tout λ.

On fait les hypothèses suivantes:

i) F est Fréchet différentiable en $(\lambda, x(\lambda))$ pour tout λ,

ii) $F_X(\lambda, x(\lambda))$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$,

iii) le complexifié de $T_X(\lambda, x(\lambda))$ est compact pour tout λ, de valeurs propres réelles positives,

iv) l'application $\rho : \lambda \to r(T_X(\lambda, x(\lambda)))$ est continue,

v) les valeurs propres de $T_X(\lambda, x(\lambda))$ sont plus petites que 1 en $\lambda = -1$.

Sous certaines hypothèses supplémentaires (cf. M. G. Crandall et P. H. Rabinowitz [4]) le point $(0, x(0))$ est un point de bifurcation.

On s'intéresse ici à l'approximation de la branche de solutions $\{(\lambda, x(\lambda)), |\lambda| \leqslant 1\}$, sous les hypothèses i) à v). Pour λ fixé, on définit les deux algorithmes suivants, déduits respectivement de la méthode des approximations successives et de $(1.1)_\alpha$:

$$x^{n+1} = T(\lambda, x^n) \qquad \text{pour tout } n \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} x^{n+\frac{1}{3}} &= T(\lambda, x^n), \\ x^{n+\frac{2}{3}} &= T\left(\lambda, x^{n+\frac{1}{3}}\right), \\ x^{n+1} &= (1-\alpha)x^n + 2\alpha x^{n+\frac{1}{3}} - \alpha x^{n+\frac{2}{3}} \end{aligned} \tag{1.4}_\alpha$$

D'après ii) et iii), $T_x(\lambda, x(\lambda))$ possède une valeur propre de module 1 si et seulement si $\lambda = 0$.

On en déduit, grâce au théorème 1.1, que *pour* $\lambda \neq 0$ *fixé et* α *assez petit, l'algorithme* $(1.4)_\alpha$ *est localement convergent vers* $x(\lambda)$.

D'après iv) et v), on observe que

$$\rho(\lambda) < 1 \qquad \forall \lambda < 0. \tag{1.5}$$

On en déduit, grâce au théorème de Kitchen, que *pour* $\lambda < 0$ *fixé l'algorithme* (1.3) *est localement convergent vers* $x(\lambda)$.

Si on suppose en outre que:

vi) ρ est dérivable en 0 et $\rho'(0) \neq 0$,

alors, d'après (1.5), ii), iii), iv), $\rho(\lambda) > 1 \qquad \forall \lambda > 0$.

On en déduit alors que *la méthode* (1.3) *n'est localement convergente vers* $x(\lambda)$ *pour aucun* $\lambda > 0$.

Etudions la mise en oeuvre pratique lorsque i) à vi) sont vérifiés et que l'on connaît $x(-1)$. On choisit une subdivision $\{\lambda_i\}_{i=1}^{i=N}$ du segment $[-1, 1]$, avec $\lambda_i \neq 0$, et on calcule les solutions de proche en proche en partant de $x(-1)$. Etant donné $x(\lambda_i)$,

i) pour $\lambda_{i+1} < 0$, on emploie l'algorithme (1.3) avec $x^0 = x(\lambda_i)$,

ii) pour $\lambda_{i+1} > 0$, on évalue $\rho(\lambda_i)$ et on en déduit

$$\alpha^*(\lambda_i) = \min\left(2, \frac{2}{(\rho(\lambda_i)-1)^2}\right);$$

on utilise alors l'algorithme $(1.4)_\alpha$ avec $\alpha < \alpha^*(\lambda_i)$ et $x^0 = x(\lambda_i)$.

Dans les deux cas, on peut aussi évaluer $x'(\lambda_i)$ et utiliser au lieu de l'initialisation $x^0 = x(\lambda_i)$:

$$x^0 = x(\lambda_i) + (\lambda_{i+1} - \lambda_i)x'(\lambda_i).$$

Remarque 1.2. En général, on ne connaît pas à l'avance la valeur du paramètre λ où a lieu la bifurcation. On calculera donc les solutions $x(\lambda)$ par la méthode i)

puis, lorsque celle-ci ne converge plus, par la méthode ii). On en déduira a posteriori le point de bifurcation, qui correspond à $\rho(\lambda)=1$.

Nous allons montrer comment appliquer le théorème 1.1 à un problème elliptique semi-linéaire.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n\leqslant 3$; on note (u,v) et $|u|$ le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega)$; $H^2(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre 2 sur $L^2(\Omega)$. Soit f une application continûment différentiable de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Pour $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, on cherche $u^*\in H^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u^* &= \lambda f(u^*) \quad \text{dans } \Omega, \\ u^* &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

On dira que u^* est une *solution ordinaire* de (1.7) s'il n'existe pas $v\not\equiv 0\in H^2(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \lambda f'(u^*)v \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Par application du théorème des fonctions implicites, on sait que les solutions ordinaires de (1.7) sont des solutions isolées et ne sont pas des points de bifurcation.

Puisque $n\leqslant 3$, on a l'injection de Sobolev (cf. J. L. Lions [14]),

$$H^2(\Omega)\subset C^0(\bar{\Omega}); \tag{1.9}$$

on en déduit que pour $u\in H^2(\Omega)$, $f(u)\in L^2(\Omega)$; l'équation (1.7) a donc un sens dans $L^2(\Omega)$.

On se propose de déterminer les solutions ordinaires de (1.7).

Description de l'algorithme

On se donne $\alpha>0$; on définit par récurrence une famille $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H^2(\Omega)$; on part de $u^0\in H^2(\Omega)$, puis, u^m étant supposé connu, on définit u^{m+1} par

$$-\Delta u^{m+\frac{1}{3}} = \lambda f(u^m) \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.10}$$

$$-\ u^{m+\frac{1}{3}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

$$-\Delta u^{m+\frac{2}{3}} = \lambda f\left(u^{m+\frac{1}{3}}\right) \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.11}$$

$$-\ u^{m+\frac{2}{3}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

$$-\ u^{m+1} = (1-\alpha)u^m + 2\alpha u^{m+\frac{1}{3}} - \alpha u^{m+\frac{2}{3}}. \tag{1.12}_\alpha$$

Grâce à l'injection (1.9), les problèmes de Dirichlet (1.10), (1.11) admettent une unique solution dans $H^2(\Omega)$.

On démontre le résultat de convergence suivant

Théorème 1.2. *Soit $u^*\in H^2(\Omega)$ une solution ordinaire de (1.7). Alors, pour $0<\alpha<\alpha^*$, α^* assez petit, il existe un voisinage V_α de u^* dans $H^2(\Omega)$ tel que, si*

$u^0 \in V_\alpha$ *et* (u^m) *est défini par* (1.10), (1.11), $(1.12)_\alpha$, *alors pour* $m \to \infty$,

$$u^{m+\frac{i}{3}} \to u^* \text{ dans } H^2(\Omega), \qquad i = 0,1,2. \qquad \square$$

Démonstration. On définit un opérateur T de $H^2(\Omega)$ dans lui-même qui à u associe l'unique solution $v \in H^2(\Omega)$ de

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \lambda f(u) \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Puisque $u^* \in H^2(\Omega)$ est une solution de (1.7), c'est un point fixe de T.

On montre avec les techniques de R. Temam, lemme 2.1, [23] que pour une application f de classe C^1, pour un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \leqslant 3$, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f}: H^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ u \quad &\mapsto f \circ u \end{aligned}$$

est Fréchet différentiable en u^* quelconque, de différentielle

$$\varphi \mapsto f'(u^*) \cdot \varphi.$$

On en déduit, grâce à la continuité de la solution d'un problème de Dirichlet par rapport au second membre, (de $L^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$), que l'opérateur T est Fréchet différentiable en u^*, de différentielle l'opérateur A qui à $\varphi \in H^2(\Omega)$ associe l'unique solution $\psi \in H^2(\Omega)$ de

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= \lambda f'(u^*)\varphi \quad \text{sur } \Omega, \\ \psi &= 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Le complexifié $\tilde{A}$ de A est l'opérateur qui à $\varphi \in H^2(\Omega) + iH^2(\Omega)$ associe $\psi \in H^2(\Omega) + iH^2(\Omega)$ solution de (1.14).

Puisque $n \leqslant 3$, on a

$$|f'(u^*(x))| \leqslant cte \qquad \forall x \in \bar{\Omega}$$

et on en déduit, puisque Ω est borné, que l'opérateur A est compact (grâce à l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$). Soit μ une valeur propre non nulle de $\tilde{A}$ associée au vecteur propre φ. On a:

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= \frac{\lambda}{\mu} f'(u^*)\varphi \quad \text{dans } \Omega, \\ \varphi &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.15}$$

On multiplie la première équation de (1.15) par $\bar{\varphi}$ et on intègre sur Ω. Puis

on applique la formule de Green. On obtient:

$$\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx = \frac{\lambda}{\mu} \int_\Omega f'(u^*)|\varphi|^2 dx.$$

On en déduit que les valeurs propres de $\tilde{A}$ sont réelles. Enfin 1 n'est pas valeur propre car u^* est une solution ordinaire. On est donc dans les conditions d'application du théorème 1.1 et on en déduit le théorème 1.2.

Remarque 1.3. Pour $\lambda = 0$, l'unique solution de (1.7) est $u \equiv 0$. On pourra donc calculer u^* de proche en proche en partant de $\lambda = 0$.

Remarque 1.4. On rencontre en particulier le problème (1.7) en physique des plasmas sous la forme:

$$-\Delta u = \lambda e^u \text{ dans } \Omega, \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

(cf. B. Marder et H. Weitzner [16]).

2. Un problème à frontière libre de la physique des plasmas

2.1. Introduction

On étudie ici un problème de Dirichlet non linéaire qui a été introduit par R. Temam [22, 23] comme un problème modèle d'équilibre de *plasma à frontière libre* dans une machine Tokamak. Etant donnés un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$ ($n=2$ pour le problème physique) et deux réels strictement positifs I et λ, on cherche une fonction réelle u sur Ω, appartenant à $H^1(\Omega)$, telle que

$$\begin{aligned} &-\Delta u = -\lambda u_- \quad \text{dans } \Omega, \\ &u = cte \text{ (inconnue) sur } \Gamma = \partial\Omega, \\ &\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = I, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $-u_- = \min(u, 0)$. La région $u < 0$ est la région occupée par le plasma, la région $u > 0$ correspond au vide et ces régions sont connues lorsque le problème (2.1) est résolu.

L' existence de solution (pour λ quelconque) et l'unicité (pour λ petit) pour ce problème ont été démontrées successivement par R. Temam [23], H. Berestycki et H. Brezis [1], J. P. Puel [18]. Un résultat de non unicité a été établi par D. G. Schaeffer [19]. Des méthodes d'approximation d'un problème voisin (norme L^2 de u_- fixée et λ inconnu) ont été étudiées par C. Guillope [8] et J. Laminie [13].

Nous étudions ici la stabilité des solutions de (2.1) relativement à un problème évolutif. Les solutions variationnelles (c'est-à-dire qui minimisent une certaine fonctionnelle) sont stables. Puis nous développons deux nouvelles

méthodes d'approximation des solutions de (2.1), l'une basée sur l'algorithme standard des approximations successives, l'autre sur l'algorithme $(1.1)_\alpha$ de la partie 1. La première méthode est localement convergente pour les solutions stables (grâce au théorème de Kitchen); la deuxième méthode est localement convergente pour toutes les solutions ordinaires (c'est-à-dire lorsque le problème linéarisé est injectif), stables ou instables (grâce au théorème 1.1).

Plusieurs développements mentionnés ci-dessus seraient triviaux si le problème (2.1) était plus régulier (l'application $u \to -u_-$ n'est pas différentiable partout). D'une part on pourrait utiliser des algorithmes classiques, tels que la méthode de Newton, d'autre part on pourrait simplifier les démonstrations en utilisant le calcul des variations classique (minimisation sur une variété) ou le théorème des fonctions implicites.

Comme autre prolongement de ce travail, signalons que la formulation du problème (2.1) en problème de point fixe fournit une nouvelle démonstration de l'existence de solution, utilisant le théorème de Leray-Schauder. Cette démonstration est donnée en annexe.

Des résultats numériques (obtenus après discrétisation par la méthode des éléments finis) complètent cette étude. Ils mettent en évidence un phénomène de non-unicité et de bifurcation pour un domaine en forme de sablier (domaine allongé et étranglé en son centre). Pour une même valeur de λ (λ assez grand), ou bien le plasma se regroupe d'un seul côté du col, ou bien il se sépare en deux morceaux.

2.2. Rappels

Les principaux résultats obtenus actuellement dans l'étude du problème (2.1) sont les suivants. On suppose que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ de classe C^4.

i) Pour tout $\lambda > 0$, le problème (2.1) possède au moins une solution u appartenant à $W^{3,p}(\Omega)$, $\forall p$, $1 \leqslant p < \infty$, et à $C^{2+\eta}(\bar{\Omega})$, $\forall \eta$, $0 \leqslant \eta < 1$.

ii) Pour tout λ, $0 < \lambda \leqslant \lambda_2$, où λ_2 est la deuxième valeur propre du problème de Dirichlet dans Ω, il existe une unique fonction u appartenant à $H^1(\Omega)$ solution de (2.1).

iii) On a les équivalences suivantes, pour toutes solutions u de (2.1),

$$\lambda < \lambda_1 \Leftrightarrow u(\Gamma) < 0,$$
$$\lambda = \lambda_1 \Leftrightarrow u(\Gamma) = 0,$$
$$\lambda > \lambda_1 \Leftrightarrow u(\Gamma) > 0,$$

où λ_1 est la première valeur propre du problème de Dirichlet dans Ω et $u(\Gamma)$ est la valeur de u sur Γ. Il n'existe donc une frontière libre, c'est-à-dire

$$\Gamma_p = \{x \in \Omega | u(x) = 0\} \neq \varnothing,$$

que dans le troisième cas.

iv) Il a été démontré par R. Temam[1] qu'étant donnée $u \in H^1(\Omega)$ solution de (2.1) et vérifiant aussi

$$\text{mes}\{x \in \Omega | u(x) = 0\} = 0, \tag{2.2}$$

une condition nécessaire de bifurcation est qu'il existe $v \in H^1(\Omega)$, $v \not\equiv 0$, tel que

$$\begin{aligned} &-\Delta v = \lambda h(-u)v \text{ dans } \Omega, \\ &-\ v = 0 \qquad \text{sur } \Gamma, \\ &\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

où h désigne la fonction d'Heaviside.

Lorsqu'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifie (2.1) et (2.2) et que la seule solution $v \in H^1(\Omega)$ de (2.3) est $v \equiv 0$, on dira que u est une *solution ordinaire* de (2.1). On remarque que dans la définition précédente le système (2.3) peut être remplacé par le système suivant

$$\begin{aligned} &-\Delta v = \lambda h(-u)v \text{ dans } \Omega, \\ &\quad v = cte \text{ (inconnue) sur } \Gamma, \\ &\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

En effet, soit $v \not\equiv 0$, $v \in H^1(\Omega)$ solution de (2.4). D'après (2.1) et (2.4), on a:

$$\int_\Omega \Delta v u\, d\tau - \int_\Omega v \Delta u\, d\tau = 0;$$

ce qui vaut, d'après la formule de Green,

$$u(\Gamma) \cdot \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma - v(\Gamma) \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma,$$

d'où $v(\Gamma) = 0$.

L'existence de solution de (2.1) est démontrée par R. Temam [23] en minimisant la fonctionnelle

$$e(v) = |\nabla v|^2 - 2Iv(\Gamma) - \lambda |v_-|^2$$

sur

$$K = \left\{ v \in W, \int_\Omega v_-\, d\tau = \frac{I}{\lambda} \right\},$$

[1] démonstration non publiée

où

$$W = \{v \in H^1(\Omega), v = cte \text{ (quelconque) p.p. sur } \Gamma\}.$$

On appellera *solution variationnelle* de (2.1) les solutions réalisant le minimum de e sur K. Il existe une autre formulation variationnelle équivalente (cf. H. Berestycki et H. Brezis [1] et A. Damlamian [5]).

Remarque 2.1. Si $n=2$, par application d'un résultat de Hartman et Wintner [9] les points x où $u(x)=0$ et $\nabla u(x)=0$ sont isolés, donc en nombre fini: ainsi, pour $n=2$, Γ_p est $C^{2+\eta}$ par morceaux et la condition (2.2) est vérifiée; Γ_p est $C^{2+\eta}$ globalement pour les solutions variationnelles.

2.3. Un lemme

Pour $v \in L^2(\Omega)$ fixé, on s'intéresse dans ce paragraphe à l'équation d'inconnue $C \in \mathbb{R}$:

$$\int_\Omega (v(\tau)+C)_- \, d\tau = \frac{I}{\lambda}. \tag{2.5}$$

On établit d'abord qu'il existe un unique réel C vérifiant (2.5). On introduit pour cela la fonction σ de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par:

$$\sigma(x) = \int_\Omega (v(\tau)+x)_- \, d\tau. \tag{2.6}$$

On observe que cette fonction est continue et que $\sigma(x) \to 0$ pour $x \to +\infty$ et $\sigma(x) \to +\infty$ pour $x \to -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires entraîne ainsi l'existence de $C \in \mathbb{R}$ vérifiant (2.5). D'autre part, on vérifie que la fonction σ est strictement croissante là où elle est non nulle. On en déduit l'unicité de $C \in \mathbb{R}$ solution de (2.5).

On note C la fonction de $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ qui à $v \in L^2(\Omega)$ associe l'unique réel C vérifiant (2.5).

Lemme 2.1. *Supposons que* $n \leqslant 3$. *Soit* $v^* \in H^2(\Omega)$; *on note* $u^* = v^* + C(v^*)$ *et on suppose que* mes $\{x \in \Omega | u^*(x)=0\}=0$. *L'application* C *de* $H^2(\Omega)$ *dans* $\mathbb{R}$ *est Fréchet différentiable en* v^*, *de différentielle*

$$\psi \mapsto -\frac{1}{\text{mes}(\Omega_p)} \int_{\Omega_p} \psi(\tau)\, d\tau,$$

où $\Omega_p = \{x \in \Omega | u^*(x) < 0\}$.

Démonstration. On introduit l'application

$$F : H^2(\Omega) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$F(v,x) = \int_\Omega (v(\tau)+x)_- \, d\tau. \tag{2.7}$$

i) L'application C est continue de $H^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (et même de $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$). En effet, soient $v \in L^2(\Omega)$ et une suite (v_m) d'éléments de $L^2(\Omega)$ tels que

$$v_m \to v \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ pour } m \to \infty.$$

On note $C(v_m) = C_m$, $C(v) = C$. On a:

$$F(v,C) - F(v,C_m) + F(v,C_m) - F(v_m,C_m) = 0.$$

Or

$$|F(v,C_m) - F(v_m,C_m)| \leqslant \text{mes}(\Omega)^{1/2} |v - v_m|_{L^2},$$

d'où

$$F(v,C_m) \to F(v,C) \text{ pour } m \to \infty,$$

ou encore, avec la fonction σ définie par (2.6),

$$\sigma(C_m) \to \sigma(C).$$

Comme l'application σ est continue et strictement monotone sur l'intervalle où elle est non nulle, l'application réciproque, définie sur $]0, +\infty[$, est continue. D'où $C_m \to C$ pour $m \to \infty$, ce qui prouve i).

ii) L'application F est Fréchet différentiable en (v^*, C^*). En effet, R. Temam a démontré dans [23] que l'application

$$\begin{aligned} H^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ u &\mapsto -u_- \end{aligned}$$

est Fréchet différentiable en u^*, pourvu que $n \leqslant 3$ et $\text{mes}\{x | u^*(x) = 0\} = 0$. La différentielle est:

$$\varphi \mapsto h(-u^*)\varphi.$$

L'assertion ii) en découle et on en déduit la différentielle de F

$$(\psi,\gamma) \mapsto -\int_{\Omega_p} (\psi(\tau)+\gamma)\, d\tau.$$

iii) La dérivée de F par rapport à la seconde variable est inversible (c'est-à-dire ici est non nulle). En effet, cette dérivée est le réel $-\text{mes}(\Omega_p)$, qui est non nul puisque $\int_\Omega u^*_- \, d\tau = I/\lambda$.

Puisque la fonction C de $H^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $F(v, C(v)) = I/\lambda$ pour tout $v \in H^2(\Omega)$ et vérifie les conditions i) ii) iii), un raisonnement élémentaire de

calcul différentiel montre que C est Fréchet différentiable en v^*, de différentielle $-F_2'^{-1}F_1'$, soit

$$\psi \mapsto -\frac{1}{\text{mes}(\Omega_p)} \int_{\Omega_p} \psi(\tau)\, d\tau,$$

d'où le lemme 2.1. □

2.4. Stabilité des solutions variationnelles

On définit dans ce papier la stabilité d'une solution u^* de (2.1), vérifiant en outre (2.2), relativement au problème évolutif suivant[1]. On note

$$\Omega_p = \{x \in \Omega | u^*(x) < 0\},\ \Omega_v = \{x \in \Omega | u^*(x) > 0\},$$

Ω_v étant éventuellement vide.

Etant donné $\varphi_0 \in H^2(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi_0 = 0 \text{ sur } \Omega_v, \\ &\varphi_0 = cte \text{ (quelconque) sur } \Gamma, \\ &\int_{\Omega_p} \varphi_0(\tau)\, d\tau = 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

on cherche $\varphi \in C^0([0,T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$ tel que

$$\begin{aligned} &h(-u^*)\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta_x\varphi = \lambda h(-u^*)\varphi, \\ &\varphi(x,t) = \gamma(t) \text{ (cte en } x \text{ inconnue)}, \\ &\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \\ &\int_{\Omega_p} \varphi(x,t)\, dx = 0 \text{ pour tout } t. \end{aligned} \tag{2.9}$$

La solution u^* est dite *linéairement stable* si et seulement si les solutions de (2.9) de la forme $e^{-\nu t}\varphi(x)$, avec $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi \in H^2(\Omega)$, correspondent à $\text{Re}\,\nu > 0$.

Elle est dite *linéairement instable* si et seulement si il existe une telle solution avec $\text{Re}\,\nu < 0$.

On peut formuler un peu autrement cette définition en introduisant la plus petite valeur propre μ_1 (on en démontre l'existence ci-dessous) de

$$\begin{aligned} &-\Delta\varphi_1 = \mu_1 h(-u^*)\varphi_1 \text{ dans } \Omega, \\ &\varphi_1 = cte \text{ (inconnue) sur } \Gamma, \\ &\int_\Omega h(-u^*)\varphi_1\, d\tau = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

[1] Etant donné la complexité du problème évolutif physique (cf. C. Mercier [17]), on ne sait pas si le problème (2.9) en est le linéarisé.

On vérifie, puisque les valeurs propres de (2.10) sont réelles, que

u^* est linéairement stable $\Leftrightarrow \lambda < \mu_1$,

u^* est linéairement instable $\Leftrightarrow \mu_1 < \lambda$.

Pour étudier les valeurs propres du problème (2.10), on introduit l'opérateur A de $H^1(\Omega)$ dans lui-même qui à φ associe l'unique solution $\psi \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{aligned} &-\Delta\psi = h(-u^*)\varphi \qquad \text{dans } \Omega, \\ &\psi = cte \text{ (inconnue) sur } \Gamma, \\ &\int_\Omega h(-u^*)\psi \, d\tau = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

On vérifie (comme au paragraphe 1.3) que le complexifié de l'opérateur A est compact et de valeurs propres réelles positives. On en déduit l'existence d'une plus petite valeur propre μ_1 pour le problème (2.10).

Remarque 2.2. Introduisant l'espace $H = \left\{ \varphi \in W, \int_{\Omega_p} \varphi(\tau) d\tau = 0 \right\}$, muni du produit scalaire $(\nabla., \nabla.)$ on montre que la restriction de l'opérateur A à H est un opérateur autoadjoint de H dans lui-même. Utilisant une base hilbertienne de vecteurs propres de A, on démontre que (2.9) possède des solutions si et seulement si φ_0 vérifie (2.8). L'unicité de solution de (2.9) est montrée de façon classique.

Avec ces définitions, on peut énoncer:

Proposition 2.1. *Supposons $n \leqslant 3$. Les solutions ordinaires et variationnelles de* (2.1) *sont linéairement stables.*

Démonstration. D'après des résultats de R. Temam [22, 23], on sait que $e : W \cap H^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, deux fois différentiable en u^* grâce à (2.2), avec

$$\begin{aligned} e'(u)v &= 2(\nabla u, \nabla v) - 2Iv(\Gamma) + 2\lambda(u_-, v), \\ e''(u^*)\varphi\psi &= 2(\nabla\varphi, \nabla\psi) - 2\lambda \int_{\Omega_p} \varphi\psi \, d\tau. \end{aligned}$$

Puisque u^* est solution de (2.1),

$$e'(u^*)v = 0 \qquad \forall v \in W.$$

Soient $\varphi \in H \cap H^2(\Omega)$ (H est défini dans la remarque 2.2) et $\psi = \varphi - \varphi(\Gamma)$; on note $v^* = u^* - u^*(\Gamma)$. Pour $\varepsilon > 0$, on introduit $u_\varepsilon \in K$ par

$$u_\varepsilon = v^* + \varepsilon\psi + C(v^* + \varepsilon\psi).$$

D'après le lemme 2.1, on a

$$\| u_\varepsilon - u^* - \varepsilon\varphi \|_{H^2(\Omega)} = o(\varepsilon). \tag{2.13}$$

Composant (2.13) et un développement de Taylor Young de e à l'ordre 2 en u^*, on obtient:

$$\left| e(u_\varepsilon) - e(u^*) - \frac{\varepsilon^2}{2} e''(u^*)\varphi\varphi \right| = o(\varepsilon^2);$$

faisant tendre ε vers 0, on en déduit

$$\lambda \int_{\Omega_p} \varphi^2 d\tau \leqslant |\nabla \varphi|^2.$$

Puisque les fonctions propres de (2.10) appartiennent à $H \cap H^2(\Omega)$, on a:

$$\lambda \int_{\Omega_p} \varphi_1^2 d\tau \leqslant |\nabla \varphi_1|^2 = \mu_1 \int_{\Omega_p} \varphi_1^2 d\tau,$$

d'où $\lambda \leqslant \mu_1$. Comme u^* est une solution ordinaire, $\lambda \neq \mu_1$, et la proposition est démontrée. □

2.5 Approximation des solutions

Description de l'algorithme alg 1

On définit par récurrence une famille (u^m) d'éléments de $H^2(\Omega)$. On part de u^0 puis, u^m étant connu, on définit u^{m+1} par

$$\begin{aligned} &-\Delta u^{m+1} = -\lambda \underline{u}^m \text{ dans } \Omega, \\ &u^{m+1} = cte \text{ (inconnue) sur } \Gamma, \\ &\int_\Omega \underline{u}^{m+1} d\tau = I/\lambda. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Description de l'algorithme alg 2_α

On se donne un réel $0 < \alpha < 2$; on définit une famille (u^m) d'éléments de $H^2(\Omega)$. On part de u^0, puis, u^m étant connu, on définit u^{m+1} en trois étapes:

$$\begin{aligned} &-\Delta u^{m+\frac{1}{3}} = -\lambda \underline{u}^m \text{ dans } \Omega, \\ &u^{m+\frac{1}{3}} = cte \text{ (inconnue) sur } \Gamma, \\ &\int_\Omega u^{m+\frac{1}{3}} d\tau = I/\lambda, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} &-\Delta u^{m+\frac{2}{3}} = -\lambda u^{m+\frac{1}{3}} \text{ dans } \Omega, \\ &u^{m+\frac{2}{3}} = cte \text{ (inconnue) sur } \Gamma, \\ &\int_\Omega u^{m+\frac{2}{3}} d\tau = I/\lambda, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$u^{m+1} = (1-\alpha)u^m + 2\alpha u^{m+\frac{1}{3}} - \alpha u^{m+\frac{2}{3}}. \tag{2.17}$$

On montrera ci-dessous que les problèmes (2.14) (2.15) (2.16) sont bien posés. On a le résultat de convergence

Théorème 2.1. *On suppose* $n \leqslant 3$. *Soit* u^* *une solution ordinaire de* (2.1).

i) *Pour tout* α, $0<\alpha<\alpha^*$, α^* *assez petit, il existe un voisinage* V_α *de* u^* *dans* $H^2(\Omega)$ *tel que, si* $u^0 \in V_\alpha$ *et* (u^m) *est défini par alg* 2_α, *alors, pour* $m \to \infty$,

$$u^{m+\frac{i}{3}} \to u^* \text{ dans } H^2(\Omega), \quad i = 0,1,2.$$

ii) *Si de plus* u^* *est linéairement stable, il existe un voisinage* V *de* u^* *dans* $H^2(\Omega)$ *tel que, si* $u^0 \in V$ *et* (u^m) *est défini par alg* 1, *alors pour* $m \to \infty$,

$$u^m \to u^* \text{ dans } H^2(\Omega).$$

Démonstration. On définit un opérateur T de $H^2(\Omega)$ dans lui-même qui à u associe $\tilde{u} = v + C(v)$ où $v \in H^1(\Omega)$ est l'unique solution de

$$\begin{aligned} -\Delta v &= -\lambda u_- \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \qquad\quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \tag{2.18}$$

La fonction $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$ est l'unique solution de

$$\begin{aligned} &-\Delta \tilde{u} = -\lambda u_- \text{ dans } \Omega, \\ &\tilde{u} = cte \text{ (inconnue) sur } \Gamma, \\ &\int_\Omega \tilde{u}_- \, d\tau = I/\lambda. \end{aligned} \tag{2.19}$$

On a ainsi établi que les problèmes (2.14) (2.15) (2.16) sont bien posés. Soit u^* une solution de (2.1). On sait qu'alors $u^* \in K$. Il y a donc équivalence entre u^* est solution de (2.1) et $u^* \in H^2(\Omega)$ est point fixe de T.

L'opérateur T est le composé des applications:

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & H^2(\Omega) & \to & H^2(\Omega) \\ u & \mapsto & -u_- & \mapsto & v & \mapsto & \tilde{u} \end{array}$$

où v est solution de (2.18) et $\tilde{u} = v + C(v)$.

D'après la différentiabilité de l'application $u \to -u_-$ (on utilise ici (2.2)), d'après la continuité de l'application linéaire définie par (2.18) et d'après le lemme 2.1 (on utilise ici (2.2) et $\tilde{u} = u = u^*$), l'opérateur T est Fréchet différentiable en u^*, de différentielle l'opérateur λA, où A a été défini par (2.11).

Le complexifié de l'opérateur λA, de $H^2(\Omega)$ dans lui-même, est compact, de valeurs propres réelles; 1 n'est pas valeur propre car u^* est une solution ordinaire.

On est ainsi dans les conditions d'application du théorème 1.1 et on en déduit i).

Si de plus u^* est linéairement stable, alors le rayon spectral de λA, qui est λ/μ_1, est strictement plus petit que 1. Le théorème de Kitchen entraîne ii), ce qui achève la démonstration du théorème 2.1. □

2.6. Exemple numérique de bifurcation

On décrit d'abord la discrétisation du problème (2.1) par la méthode des éléments finis. On suppose que Ω est un domaine borné polygonal de $\mathbb{R}^2$ et on lui associe des triangulations $\mathcal{T}_h$ régulières où $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \{\text{diam}(T)\}$. On suppose que ces triangulations sont positives, c'est-à-dire (cf. P. G. Ciarlet et P. A. Raviart [3]):

$$\text{les angles de tous les triangles sont} \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.20}$$

On associe à ces triangulations $\mathcal{T}_h$ les espaces d'éléments finis

$$V_h = \left\{ u_h \in C^0(\bar{\Omega}),\quad u_{h|\Gamma} = 0,\quad u_{h|T} \text{ affine } \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$
$$W_h = V_h \oplus \mathbb{R} \subset W.$$

On déduit de la formulation variationnelle du problème (2.1) le problème approché: trouver $u_h \in W_h$ tel que

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) - Iv_h(\Gamma) + \lambda(u_{h-}, v_h) = 0 \ \forall v_h \in W_h. \tag{2.22}$$

On démontre en annexe

Proposition 2.2. *Sous l'hypothèse* (2.20), *pour tout* $\lambda > 0$ *fixé,*

i) *pour tout* $h > 0$, *il existe au moins une solution*

$u_h \in W_h \cap L^\infty(\Omega)$ *de* (2.22);

ii) *il existe une constante indépendante de h telle que*

$\|u_h\|_{H^1} \leqslant cte \quad \forall h > 0$;

iii) *il existe une sous-suite* $h' \to 0$ *et une solution u de* (2.1) *telles que* $u_{h'} \to u$ *dans* H^1 *fort pour* $h' \to 0$;

iv) *si le problème* (2.1) *admet une unique solution u, alors* $u_h \to u$ *dans* H^1 *fort pour* $h \to 0$.

L'exemple étudié numériquement concerne l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ défini par $-3 < x_2 < 3$ et

$$\text{pour } -3 < x_2 < -1 \quad , \quad 1 < x_1 < 3$$
$$\text{pour } -1 \leqslant x_2 \leqslant 1 \quad , \quad 1 + \frac{2}{3} < x_1 < 2 + \frac{1}{3}$$
$$\text{pour } \quad 1 < x_2 < 3 \quad , \quad 1 < x_1 < 3.$$

On donne à la figure 1 la triangulation $\mathcal{T}_h$ utilisée dans tous les calculs.

Nombre de triangles = 512
Nombre de sommets = 309

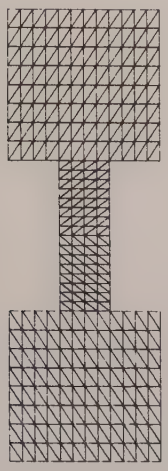


Fig. 1.

L'opérateur modèle $-\Delta$ de (2.1) est remplacé ici par

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right);$$

la constante multiplicative I est fixée à 5.

Le calcul des premières valeurs propres du problème de Dirichlet approché donne:

$$\lambda_{1h} = 2{,}511085 \pm 2.10^{-6}, \quad \lambda_{2h} = 2{,}511132 \pm 4.10^{-6},$$
$$\lambda_{3h} = 6{,}098462 \pm 6.10^{-6}.$$

Remarque 2.3. L'ouvert Ω est voisin de l'ouvert $\Omega' =]1, 3[\times]-3, -1[\,U\,]1, 3[\times]1, 3[$ que possède une première valeur propre double. C'est pourquoi λ_{1h} et λ_{2h} sont voisins.

Les résultats sont les suivants:

i) pour $\lambda < \lambda_{2h}$, nous ne savons calculer qu'une seule solution; elle est obtenue par alg 1_h, elle est stable et symétrique, le plasma est connexe;

ii) pour $\lambda = \lambda_{2h}$, nous avons calculé huit solutions, dont une seule symétrique; nous conjecturons que cette dernière est un *point de bifurcation* et qu'il existe pour cette valeur de λ *un continuum de solutions*; toutes les solutions sont obtenues par alg 1_h; elle vérifient la condition nécessaire de bifurcation, car $\lambda = \mu_{1h}$[1];

iii) pour $\lambda > \lambda_{2h}$, nous savons calculer trois et seulement trois solutions; deux sont stables dissymétriques, obtenues par alg 1_h; une est symétrique, instable, obtenue par alg $2_{h,\alpha}$ (et elle ne peut pas être obtenue par alg 1_h); à partir de $\lambda = 2{,}6$, le plasma symétrique est non connexe.

[1]On désigne par μ_{1h} la première valeur propre du problème (2.10) discrétisé.

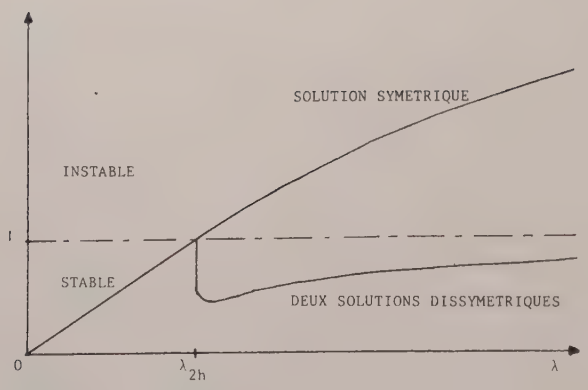


Fig. 2.

Les courbes ci-dessous donnent, en fonction de λ et pour toutes les solutions calculées:

—la valeur de $\dfrac{\lambda}{\mu_{1h}}$ qui mesure la stabilité (fig. 2),

—la valeur de

$$\int_{x_1>0} u_h(x)\,dx - \int_{x_2<0} u_h(x)\,dx$$

qui mesure la symétrie (fig. 3),

—le tracé de la frontière du plasma

$$\Gamma_p = \{x \in \Omega | u_h(x) = 0\} \quad \text{(fig. 4).}$$

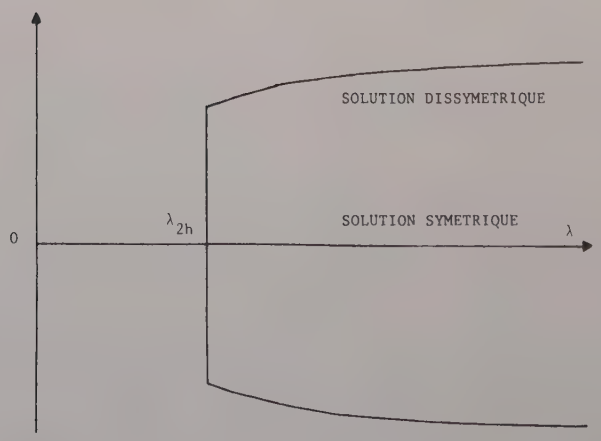


Fig. 3.

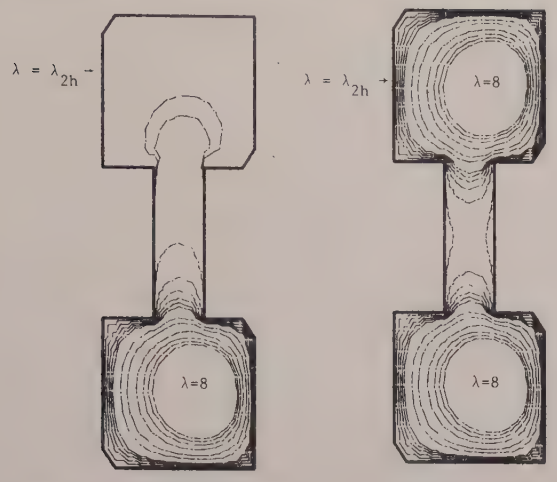


Fig. 4. Solutions dissymétriques. Solutions symétriques.

Rémarque 2.4. Les solutions symétriques instables obtenues par alg 2_h peuvent aussi être obtenues par alg 1_h en imposant la symétrie. L'emploi de l'algorithme alg 2_h devient nécessaire pour le calcul des solutions instables pour un ouvert non symétrique.

Remarque 2.5. Pour des ouverts Ω' union de deux ouverts identiques disjoints Ω_0 et Ω_0', on montre facilement que:

i) pour $\lambda<\lambda_1=\lambda_2$, il existe une unique solution de (2.1),
ii) pour $\lambda=\lambda_1$, il existe un continuum de solutions de (2.1),
iii) pour $\lambda_1<\lambda<\lambda_3=\lambda_4$, il existe trois solutions de (2.1).

La solution $\left(\lambda_1, \lim_{\lambda\to\lambda_1^-} u(\lambda)\right)$ est un point de bifurcation. Nos résultats numériques sont analogues à ce cas particulier, ce qui s'explique puisque Ω est voisin d'un ouvert non connexe Ω' du type précédent. La branche trouvée numériquement verticale est peut être "presque verticale."

3. Annexe

Le but de ce paragraphe est de donner un nouvelle démonstration de l'existence de solution de (2.1) et de démontrer la proposition 2.2.

a) *Démonstration de l'existence de solution de* (2.1). Soit $p>n$. On introduit l'opérateur non linéaire S de $L^p(\Omega)$ dans lui-même qui à $\varphi\in L^p(\Omega)$ associe $\psi\in L^p(\Omega)$ par:
v est la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$-\Delta v = -\lambda\varphi \text{ dans } \Omega, \tag{3.1}$$

ψ est donné par

$$\psi = (v + C(v))_-. \tag{3.2}$$

Si u est une solution de (2.1), u_- est un point fixe de S et si φ est un point fixe de S, $u=v+C(v)$, où v est la solution de (3.1), est une solution de (2.1).

i) Il existe une boule B de $L^p(\Omega)$ telle que $S(B) \subset B$. Puisque $p > n$, un théorème de G. Stampacchia [21] donne l'existence d'une constante a, qui ne dépend que de Ω, n, p, telle que, pour tout $\varphi \in L^p(\Omega)$ la solution v de (3.1) appartient à $L^\infty(\Omega)$ et vérifie

$$|v|_{L^\infty} \leqslant a\lambda|\varphi|_{L^p}. \tag{3.3}$$

Pour tout $v \in L^\infty(\Omega)$, on montre facilement que $u = v + C(v)$ vérifie

$$|u|_{L^\infty} \leqslant 2|v|_{L^\infty} + \frac{I}{\lambda \operatorname{mes}(\Omega)}. \tag{3.4}$$

On en déduit que ψ défini par (3.2) vérifie

$$|\psi|_{L^\infty} \leqslant 2|v|_{L^\infty} + \frac{I}{\lambda \operatorname{mes}(\Omega)}. \tag{3.5}$$

D'autre part:

$$|\psi|_{L^1} = \frac{I}{\lambda}, \tag{3.6}$$

ce qui donne

$$|\psi|^p_{L^p} \leqslant \frac{I}{\lambda}|\psi|^{p-1}_{L^\infty}. \tag{3.7}$$

Regroupant les estimations (3.3) (3.5) (3.7), on a

$$|S\varphi|^p_{L^p} \leqslant \{C_1|\varphi|_{L^p} + C_2\}^{p-1} \quad \forall \varphi \in L^p(\Omega), \tag{3.8}$$

où

$$C_1 = \left(\frac{I}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot 2a\lambda, \quad C_2 = \left(\frac{I}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot \frac{I}{\lambda \operatorname{mes}(\Omega)}.$$

Soit R la plus grande racine positive de

$$X^p - \{C_1 X + C_2\}^{p-1} = 0.$$

Supposons que $|\varphi|_{L^p} \leqslant R$. On a donc

$$\{C_1|\varphi|_{L^p} + C_2\}^{\frac{1}{p-1}} \leqslant \{C_1 R + C_2\}^{\frac{1}{p-1}} = R^p.$$

D'où, grâce à (3.8), $|S\varphi|_{L^p} \leqslant R$. On a ainsi établi i).

ii) L'opérateur S est compact de $L^p(\Omega)$ dans lui-même. L'opérateur S est le composé des deux applications:

$$\begin{array}{ccccc} L^p(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) & \to & L^p(\Omega) \\ \varphi & \mapsto & v & \mapsto & \psi. \end{array}$$

La première est linéaire continue de L^p dans $H_0^1 \cap L^\infty$. La deuxième est continue et non linéaire de $L^p(\Omega)$ dans lui-même d'après le point i) du lemme 2.1. D'autre part, l'injection de $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte $\forall p$, $1 \leqslant p < \infty$ (Ω borné). En effet, de toute suite bornée dans H_0^1, on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$, puis une sous-suite convergente presque partout dans Ω. La suite étant bornée dans $L^\infty(\Omega)$, le théorème de Lebesgue implique qu'elle converge dans tous les L^p, $1 \leqslant p < \infty$. On en déduit ii).

On est dans les conditions d'application du théorème de point fixe de Leray-Schauder, ce qui entraîne l'existence de $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solution de (2.1).

b) *Démonstration de la proposition* 2.2. Soit $p > n = 2$

On définit un opérateur S_h de $L^p(\Omega)$ dans lui-même qui à $\varphi_h \in L^p(\Omega)$ associe $\psi_h \in L^p(\Omega)$ par:
v_h est la solution dans V_h de

$$(\nabla v_h, \nabla w_h) = -\lambda(\varphi_h, w_h) \qquad \forall w_h \in V_h \tag{3.9}$$

et ψ_h est défini par:

$$\psi_h = (v_h + C(v_h))_- . \tag{3.10}$$

Puisque les triangulations $\mathcal{T}_h$ sont positives, un théorème de P. G. Ciarlet et P. A. Raviart (cf. [3]) donne une estimation analogue à (3.3)

$$|v_h|_{L^\infty} \leqslant a\lambda |\psi_h|_{L^\infty}, \tag{3.11}$$

où la constante a ne dépend pas de h.

Les estimations (3.5) (3.6) (3.7) étant valables, on en déduit l'existence de constantes C_3, C_4 indépendantes de h telles que

$$|S_h \varphi_h|_{L^p}^p \leqslant \{C_3 |\varphi_h|_{L^p} + C_4\}^{p-1} \forall \varphi_h \in L^p(\Omega). \tag{3.12}$$

Il existe donc une boule B', de rayon R', de $L^p(\Omega)$ telle que $S_h(B') \subset B'$, et cette boule est indépendante de h.

D'autre part, l'opérateur S_h est le composé des deux applications

$$L^p(\Omega) \to V_h \to L^p(\Omega)$$
$$\varphi h \quad \mapsto v_h \mapsto \psi_h.$$

L'espace de dimension finie V_h étant muni de sa topologie canonique, la première application est linéaire continue, la deuxième continue non linéaire, grâce à la continuité de C.

L'espace V_h étant localement compact, on en déduit que l'opérateur S_h est compact de $L^p(\Omega)$ dans lui-même. Le théorème du point fixe de Leray Schauder entraîne donc i) de la proposition 2.2.

Soit u_h une solution quelconque de (2.1) et soit $\varphi_h = u_{h-}$. D'après (3.12), on a

$$|\varphi_h|_{L^p}^p - \{C_3 |\varphi_h|_{L^p} + C_4\}^{p-1} \leqslant 0,$$

d'où, par définition de R', (cf. définition de R)

$$|\varphi_h|_{L^p} \leqslant R'. \tag{3.13}$$

On en déduit par (3.11)

$$|v_h|_{L^\infty} \leqslant cte, \tag{3.14}$$

et d'après (3.9)

$$|\nabla v_h|_{L^2} \leqslant cte. \tag{3.15}$$

D'après (3.4) (3.14) (3.15), on en déduit

$$\|u_h\|_{H^1} \leqslant cte$$

où la constante ne dépend pas de h, ce qui établit ii).

On déduit iii) et iv) de façon classique, la convergence forte dans $H^1(\Omega)$ découlant de

$$|\nabla u_h|^2_{L^2} - Iu_h(\Gamma) - \lambda|u_{h-}|^2_{L^2} = 0$$

La proposition 2.2 est ainsi démontrée.

References

1. H. Berestycki et H. Brezis, Sur certains problèmes de frontière libre, C. R. Acad. Sc. Paris, *283*, série A, 1976, 1091–1094.
2. C. Bolley, Etude numérique d'un problème de bifurcation, thèse de 3ème cycle, Univ. de Rennes, 1977.
3. P. G. Ciarlet et P. A. Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., *2*, 17–31, 1973.
4. M. G. Crandall et P. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, J. Func. Analysis, *8*, 321–340, 1971.
5. A. Damlamian, Application de la dualité non convexe à un problème non linéaire à frontière libre, C. R. Acad. Sc. Paris, *286*, série A, 153–155, 1978.
6. J. Dieudonne, Eléments d'analyse, tome I, Gauthier-Villars, Paris, nouv. éd. 1972.
7. H. Fujii et M. Tabata, On numerical analysis of snap and bifurcation bucklings of arches and shells, en préparation.
8. C. Guillope, Sur un problème à frontière libre intervenant en physique des plasmas, thèse de 3ème cycle, Univ. de Paris XI, 1977.
9. P. Hartman et A. Wintner, On the local behaviour of solutions of non-parabolic partial differential equations, Am. J. of Math, *75*, 449–476, 1953.
10. H. B. Keller, Numerical solution of bifurcation and non-linear eigenvalue problems, in *Application of Bifurcation Theory* (P. Rabinowitz ed.), Academic Press, New York, 359–384, 1977.
11. F. Kikuchi, An iterative finite element scheme for bifurcation analysis of semi-linear elliptic equations, ISAS Report, Univ. of Tokyo, *542*, 203–231, 1976.
12. J. W. Kitchen, Concerning the convergence of iterates to fixed points, Stud. Math, *27*, 247–249, 1966.
13. J. Laminie, Détermination numérique de la configuration d'équilibre du plasma d'un Tokamak, thèse de 3ème cycle, Univ. de Paris XI, 1977.

14. J. L. Lions, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Les Presses de L'université de Montréal, 2ème ed. 1965.
15. R. Lozi, Analyse numérique de certains problèmes de bifurcation, thèse de 3ème cycle, Univ. de Nice, 1975.
16. B. Marder et H. Weitzner, A bifurcation problem in *E*-layer equilibria, Plasma Physics, *12*, 435–445, 1970.
17. C. Mercier, The magnetohydrodynamic approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configuration, Lectures in plasma physics, Comm. of the European Communities, Luxembourg, 1974.
18. J. P. Puel, Sur un problème de valuer propre non linéaire et de frontière libre, C. R. Acad. Sc. Paris, *284*, série A, 861–863, 1977.
19. D. G. Schaeffer, Non uniqueness in the equilibrium shape of a confined plasma, Comm. in P.D.E., 2(6), 587–600, 1977.
20. M. Schechter, Principles of functional analysis, Academic Press, New York, 1971.
21. G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) *15*, 189–258, 1965.
22. R. Temam, A nonlinear eigenvalue problem: the shape of equilibrium of a confined plasma, Arch. Rat. Mech. Anal., *60*, 51–73, 1975.
23. R. Temam, Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics, Communications in P.D.E., 2(6), 563–585, 1977.

Accepted July 12, 1978.

CHAPITRE III

Vol. 47, No. 4 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © December 1980

BIFURCATION OF FREE BOUNDARY PLASMA EQUILIBRIA

MICHEL SERMANGE

0. Introduction. In this paper, we study a non-linear Dirichlet problem introduced by R. Temam [19] as a special case of free boundary plasma equilibrium. Given a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ and a positive real number λ, we look for $u \in H^1(\Omega)$ (Sobolev space of order 1 on $L^2(\Omega)$) such that

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u_+ & \text{a.e. in } \Omega, \\ u = ct. \text{ (unknown) a.e. on } \Gamma = \partial\Omega, \\ -\int_\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = I, \end{cases} \tag{0.1}$$

where $\Delta = \sum_{i=1}^{2} \partial^2/\partial x_i^2$ and $u_+ = \max(u, 0)$.

From a physical point of view, the sets Ω and $\Omega_p = \{x \in \Omega \mid u(x) > o\}$ are respectively the sections of the Tokamak and of the plasma, supposed to be infinite straight cylinders; the distribution u is the poloidal magnetic flux. Thus, the set Ω_p occupied by the plasma is not given beforehand.

R. Temam [19] first proved the existence and regularity of solutions of (0.1) for every $\lambda > 0$, and uniqueness for $0 < \lambda < \lambda_2$, where λ_2 is the second eigenvalue of the Dirichlet problem on Ω.

Here we prove the existence of bifurcation of solutions of (0.1) for certain symmetrical domains. The domains considered are hourglass-shaped and they were first introduced by D. G. Schaeffer [14] in order to give an example of non-uniqueness of solutions of (0.1). Let us also mention that numerical computations of the bifurcated solutions for such domains were presented in a previous paper [15].

Related to the present work are formulations of sufficient conditions of bifurcation for the problem (0.1), obtained by A. Dervieux [4], B. Nicolaenko-R. Temam [9], J. Sijbrand [16] [17]; these results are different from the present result, for it has not been proved so far that there exist domains Ω where their conditions are satisfied; while we do not know if our example enters their framework, we do show that bifurcation occurs.

Our method of proof is as follows. Comparing eigenvalues of elliptic operators with discontinuous coefficients and making use of the disconnectedness of Ω_p for the symmetrical solution for λ sufficiently large (proved by D. G. Schaeffer [14]), we obtain some estimates on the eigenvalues of the linearized problem. Then we

Received June 10, 1980.

prove the bifurcation by a degree argument. A technical difficulty is that, in general, the free boundary of the plasma is not globally regular.

In a last part, we show that the present method of proof of bifurcation can also be applied in a broader framework than the "hourglass-shape" case. The author thanks R. Temam for directing this work.

1. The bifurcation theorem. Let us introduce

σ: the symmetry operator $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2)$,

S_ϵ: $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, |x_1| < 2, |x_2| < \epsilon\}$,

B_r: the ball of radius r, center $(x_1, x_2) = (3, 0)$.

As in D. G. Schaeffer [14], we shall consider the domains $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ satisfying (cf. fig. 1) the following conditions:

$$\Omega \text{ is a bounded domain of } \mathbf{R}^2,\ \partial\Omega \text{ is a } C^\infty \text{ curve and } \Omega \text{ is locally on one side of } \partial\Omega, \tag{1.1}$$

$$\Omega = \mathcal{O} \cup S_\epsilon \cup \sigma(\mathcal{O}) \text{ where } \mathcal{O} \text{ is an open set of } \mathbf{R}^2 \text{ such that } B_1 \subset \mathcal{O} \subset B_{r_0} \text{ and } \epsilon \text{ is a real number such that } 0 < \epsilon < \epsilon_0. \tag{1.2}_{\epsilon_0, r_0}$$

As in J. P. Puel [11], we introduce the following auxiliary problem: to find $v \in H^1(\Omega), v \not\equiv -1$, such that

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v_+ & \text{a.e. in } \Omega, \\ v = -1 & \text{a.e. on } \Gamma. \end{cases} \tag{1.3}$$

From a physical point of view, both problem (0.1) and (1.3) are interesting: for a flux function u, the parameter $-\int_\Gamma (\partial u/\partial n)\, d\sigma$ is the total current crossing the plasma, while the parameter $u|_\Gamma$ is the magnetic flux between the wall Γ and the boundary of the plasma. In the sequel, we shall prove bifurcation for (1.3) and, in consequence, bifurcation for (0.1).

The main result is

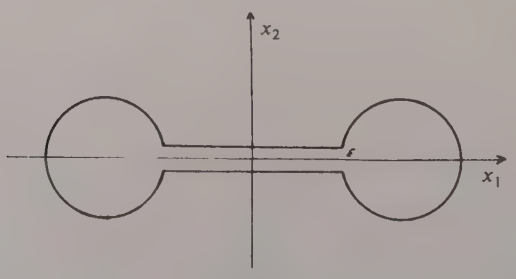


FIGURE 1.

THEOREM. *There exist* ϵ_0 *and* $r_0 - 1$ *sufficiently small such that, for any given domain* Ω *satisfying* (1.1), $(1.2)_{\epsilon_0, r_0}$, *denoting by* λ_i *the eigenvalues of the Laplacian on* Ω, (Dirichlet B. C.),

(i) *the second eigenvalue* λ_2 *is simple,*

(ii) *for* λ *such that:* $\lambda_2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_3$, *there exists only one symmetrical solution of* (0.1) (*respectively only one symmetrical solution* $v \not\equiv -1$ *of* (1.3)),

(iii) *there exists at least one bifurcation point* (α, u) *of* (0.1) (*respectively* (α, v) *of* (1.3) *with* $v \not\equiv -1$) *in* $(\lambda_2, \lambda_3) \times H^2(\Omega)$ *with respect to the branch of symmetrical solutions.* □

By bifurcation, we mean that there exist a symmetrical solution (α, u) of (0.1) with $\lambda_2 < \alpha < \lambda_3$ and a sequence of non-symmetric solutions (α_n, u_n) of (0.1) such that

$$u_n \to u \text{ in } H^2(\Omega) \quad \text{and} \quad \alpha_n \to \alpha \text{ as } n \to \infty.$$

Our proof of bifurcation does not use any classical theorem:

—since the derivative of the functional along the branch of symmetrical solutions is not linear in λ, we cannot use the bifurcation theorem of M. A. Krasnoselski

—since the local behaviour of the branch of symmetrical solutions is unknown, we cannot use a local argument; for instance, the bifurcation theorem of C. Crandall-P. H. Rabinowitz cannot be used, even after a regularization of the functional.

Our proof is based on a *global study* of the branch of symmetrical solutions, by means of the topological degree. The plan of the proof is as follows:

(a) the set of solutions of (0.1) (resp.(1.3)) when λ varies over a compact set of $(\lambda_1, +\infty)$ is compact in $H^2(\Omega)$, which is important to separate the curves of solutions;

(b) there exists only one symmetrical solution of (0.1) (resp. (1.3)) for $\lambda_2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_3$, which shows, by compactness, that the branch of symmetrical solutions is continuous in $H^2(\Omega)$;

(c) we introduce a functional form of equation (1.3) and we show that the eigenvalues μ_i of the derivative of the functional satisfy

$$\lambda_i < \mu_i < \gamma_i \qquad \forall i \geqslant 1$$

where γ_i are the eigenvalues of the Laplacian on Ω_p (Dirichlet B. C.);

(d) this shows that the topological degree for $\lambda = \lambda_2$ or for $\lambda = \lambda_3$ (where Ω_p is disconnected, as proved by D. G. Schaeffer [14]) are different, which is absurd if there is no bifurcation of (1.3).

2. A Lemma. We shall use the following lemma, which seems to be a new result.[1]

[1] A variant of this result is stated without proof in G. Stampacchia [18], Lemma 1.2.

LEMMA 2.1. *Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^q$; if $u \in C^1(\overline{\Omega})$ and $u(x) = 0 \forall x \in \partial\Omega$, then $u \in H_0^1(\Omega)$.*[2]

Proof. Let $j_\epsilon(x) = \epsilon^{-q} j(x/\epsilon)$ be a regularizing family in $\mathbb{R}^q$. For $\epsilon > 0$ given, we introduce

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \epsilon\},$$

$$\varphi_\epsilon = j_\epsilon * 1_{\Omega_{2\epsilon}}$$

$$u_\epsilon = \varphi_\epsilon \cdot u.$$

The function u_ϵ is $C^1(\overline{\Omega})$ with compact support in Ω and

$$\varphi_\epsilon(x) = 1 \qquad \forall x \in \Omega_{3\epsilon}, \tag{2.1}$$

$$0 \leqslant \varphi_\epsilon(x) \leqslant 1 \qquad \forall x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial x_i}(x) \right| \leqslant \frac{M}{\epsilon} \qquad \forall x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$|u(x)| \leqslant M'\epsilon \qquad \forall x \in \Omega \backslash \Omega_{3\epsilon}, \tag{2.4}$$

where M and M' are constants independent of ϵ.

By (2.1) (2.3) (2.4),

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial x_i} \cdot u \right)(x) \right| \leqslant M \cdot M' \qquad \forall x \in \Omega.$$

Now the convergence in $L^2(\Omega)$ of each term of

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_\epsilon = \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial x_i} \cdot u + \varphi_\epsilon \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

follows from the Lebesgue dominated convergence theorem, and we obtain

$$u_\epsilon \to u \text{ in } H^1(\Omega) \text{ for } \epsilon \to 0,$$

which proves the lemma. □

3. Proof of the theorem.

3.1. *Compactness of solutions.*

LEMMA 3.1. *If Ω is any bounded smooth domain of $\mathbb{R}^q$, $q \leqslant 3$, then*

(i) *if λ varies over a compact set of $\mathbb{R}_+^*$, the solutions u of (0.1) are bounded in $H^3(\Omega)$,*

[2] $C^k(\overline{\Omega})$ = {restriction to $\overline{\Omega}$ of functions of $C^k(\mathbb{R}^q)$}, $H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(\overline{\Omega})^{H^1(\Omega)}$

(ii) *if* λ *varies over a compact set of* $(\lambda_1, +\infty)$, *the solutions* v *of* (1.3) *are bounded in* $H^3(\Omega)$.

Proof. (i) For a given solution (λ, u) of (0, 1), we introduce as in [15]

$$\Psi = u_+ \quad \text{and} \quad \tilde{u} = u - u(\Gamma)$$

where $u(\Gamma)$ denotes the real number $u_{|\Gamma}$. Obviously, $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ and

$$-\Delta\tilde{u} = \lambda\Psi \qquad \text{a.e. in} \quad \Omega. \tag{3.1}$$

From the regularity of solutions for elliptic equations, there exists a constant c_1, depending only upon Ω and q, such that

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_1\lambda|\Psi|_{L^2(\Omega)}.$$

Since $q \leqslant 3$, the injection of Sobolev

$$H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$$

implies that $\tilde{u}$ and $\Psi \in L^\infty(\Omega)$, and that

$$|\tilde{u}|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c_2\lambda|\Psi|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2}$$

On the other hand, all $\tilde{u} \in L^\infty(\Omega)$ and $a \in \mathbb{R}$ such that

$$\int_\Omega (\tilde{u}(\tau) + a)_+ \, d\tau = \frac{1}{\lambda},$$

satisfy

$$|a| \leqslant |\tilde{u}|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\lambda \operatorname{meas}(\Omega)}.$$

Therefore, by integration of the first equation of (0.1) on Ω,

$$|u(\Gamma)| \leqslant |\tilde{u}|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\lambda \operatorname{meas}(\Omega)}$$

and, since $\Psi = (\tilde{u} + u(\Gamma))_+$, we have

$$|\Psi|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 2|\tilde{u}|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\lambda \operatorname{meas}(\Omega)}. \tag{3.3}$$

By virtue of the relation

$$|\Psi|_{L^1} = \frac{1}{\lambda},$$

Hölder's inequality yields

$$|\Psi|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{\lambda}|\Psi|_{L^\infty}. \tag{3.4}$$

From (3.2) (3.3) (3.4),

$$|\Psi|_{L^2}^2 \leqslant 2c_2|\Psi|_{L^2} + \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{meas}(\Omega)},$$

which implies

$$|\Psi|_{L^2(\Omega)} \leqslant R(\lambda)$$

where

$$R(\lambda) = c_2 + \sqrt{c_2^2 + \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{meas}(\Omega)}}$$

Therefore, if λ varies over a compact subset of $\mathbf{R}_+^*$, then

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant ct..$$

Thus, since $\Psi = u_+$,

$$\|\Psi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant ct.;$$

once again, it follows from (3.1) that

$$\|\Psi\|_{H^3(\Omega)} \leqslant ct..$$

(ii) Let $\lambda > \lambda_1$ be given. If u is a solution of (0.1), then (cf. H. Beresticki and H. Brezis [2])

$$u(\Gamma) < 0. \tag{3.5}$$

Hence, the mapping

$$u \mapsto v = -\frac{u}{u(\Gamma)} \tag{3.6}$$

is a one-to-one mapping from the set of solutions of (0.1) onto the set of solutions $v \not\equiv -1$ of (1.3), whose inverse is given by

$$v \mapsto u = \left(\lambda \int_\Omega v_+ \, dx\right)^{-1} \cdot v. \tag{3.7}$$

If λ varies over a compact subset of $(\lambda_1, +\infty)$, from (3.5) and from the compactness proved in (i), it follows that

$$|u(\Gamma)| \geqslant ct. > 0. \tag{3.8}$$

Then (ii) follows from (i), (3.6) and (3.8). □

3.2 *Uniqueness of symmetrical solutions.* The parts (i) and (ii) of the theorem are derived from the following lemmata.

LEMMA 3.2. *Let us suppose that τ is an isometry of $\mathbb{R}^q$ and that Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^q$ invariant by τ. We denote by λ_i^* the eigenvalues of the Laplacian on Ω corresponding to at least one eigenfunction invariant by τ. If $\lambda_1 < \lambda \leqslant \lambda_2^*$, then there exists exactly one solution of (0.1) invariant by τ (resp. exactly one solution $v \not\equiv -1$ of (1.3) invariant by τ).*

We follow the method of proof of uniqueness of J. P. Puel and A. Damlamian [11].

Proof. Let $\lambda_1 < \lambda \leqslant \lambda_2^*$ be given and let $v_1, v_2 \not\equiv -1$ be two solutions of (1.3) invariant by τ. We recall (cf. R. Temam [19]) that $v_i \in C^{2+\eta}(\bar{\Omega})$ $\forall \eta 0 \leqslant \eta < 1$. We denote by $\omega_i = \{x \in \Omega, v_i(x) > 0\}$, $w = v_1 - v_2$, and we introduce

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad w(x) = 0 \\ \dfrac{v_{1+}(x) - v_{2+}(x)}{w(x)} & \text{if} \quad w(x) \neq 0. \end{cases}$$

From this definition, $w \in H_0^1(\Omega)$ is invariant by τ and satisfies

$$-\Delta w = \lambda h \cdot w \qquad \text{a.e.} \quad x \in \Omega. \tag{3.9}$$

The function h is measurable, invariant by τ and

$$0 \leqslant h(x) \leqslant 1 \qquad \text{a.e.} \quad x \in \Omega. \tag{3.10}$$

Since $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \subset \Omega$, we have

$$h(x) < 1 \qquad \text{a.e. on a neighborhood of } \partial\Omega. \tag{3.11}$$

We denote by μ_i^* the eigenvalues corresponding to at least one eigenfunction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ invariant by τ of

$$-\Delta\varphi = \mu^* h\varphi.$$

From (3.10) (3.11), we can compare the eigenvalues λ_i^* and μ_i^* (cf. Lemma 5.2)

$$\lambda_i^* < \mu_i^* \qquad \forall i \geqslant 1.$$

By (3.9), λ is an eigenvalue μ_i^*; since $\lambda \leqslant \lambda_2^*$, we have

$$\lambda = \mu_1^*$$

and w is a first eigenfunction.

Hence (cf. G. Stampacchia [18] cor. 7.1)

$$w(x) > 0 \text{ (or } < 0) \qquad \forall x \in \Omega,$$

which yields

$$\bar{\omega}_2 \subset \omega_1.$$

The open set ω_1 is not necessarily connected but, since $\omega_2 \neq \emptyset$, there must exist a connected component ω_1' of ω_1 such that $\omega_2' = \omega_2 \cap \omega_1' \neq \emptyset$.

Hence

$$\bar{\omega}_2' \subset \omega_1' \quad \text{and} \quad \omega_1' \text{ is connected.} \tag{3.12}$$

Since $v_i \in C^1(\bar{\Omega})$ and $v_i = 0$ on $\partial\omega_i'$, it follows from Lemma 2.1 that $v_i \in H_0^1(\omega_i')$. From (1.3),

$$-\Delta v_i' = \lambda v_i \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\omega_i').$$

Thus λ is an eigenvalue of the Dirichlet problem in both open sets ω_1' and ω_2'. It is the first one because $v_i > 0$ in ω_i'. Since the first eigenvalue of the Dirichlet problem in a connected open set is simple, (3.12) leads to a contradiction ($v = v_2$ in ω_2', 0 in $\omega_1' \backslash \omega_2'$ is also eigenfunction).

We have proved uniqueness for (1.3) and, by (3.6) (3.7), for (0.1). The existence of solution for (0.1) or (1.3) invariant by τ can be proved by a classical fixed point method (cf. [15], §3). □

LEMMA 3.3. *There exist constants $\epsilon_0 > 0$, $r_0 > 1$, $0 < \underline{\lambda} < \bar{\lambda}$, such that, for any domain Ω satisfying* (1.1) $(1.2)_{\epsilon_0, r_0}$, *we have (denoting by λ_i^* the eigenvalues corresponding to at least one eigenfunction of the Laplacian on Ω invariant by σ)*

(i) $\lambda_2 \leqslant \underline{\lambda} < \bar{\lambda} \leqslant \lambda_3$,

(ii) $\lambda_3 \leqslant \lambda_2^*$.

Proof. The proof is based on Lemma 5.1 and 5.2 in the appendix. Let $\epsilon_n \to 0$, $r_n \to 1$ be two decreasing sequences. We consider the sequence of open sets Ω_n

$$\Omega_n = B_{r_n} \cup S_{\epsilon_n} \cup \sigma(B_{r_n})$$

and

$$\Omega' = B_1 \cup \sigma(B_1),$$

which satisfy the hypotheses of Lemma 5.1 in the appendix.

We denote by $\gamma_i^n, \gamma_i^{*n}$ the eigenvalues of the Dirichlet problem for $\Omega_n, \gamma_i, \gamma_i^*$, for Ω'. We verify that

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_1^* \neq \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_2^*.$$

We choose $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ such that

$$0 < \underline{\lambda} = \gamma_2 < \bar{\lambda} < \gamma_3.$$

By Lemma 5.1,

$$\gamma_3^n \to \gamma_3 \qquad \text{for } n \to \infty,$$

$$\gamma_2^{*n} \to \gamma_2^* \qquad \text{for } n \to \infty,$$

Hence there exists n_0 such that, for $n \geqslant n_0$,

$$\overline{\lambda} \leqslant \gamma_3^n, \ \overline{\lambda} \leqslant \gamma_2^{*n}.$$

If Ω satisfies (2.3) $(2.4)_{\epsilon_n, r_n}$, then we have

$$\Omega' \subset \Omega \subset \Omega_{n_0},$$

hence

$$\lambda_2 \leqslant \underline{\lambda} < \overline{\lambda} \leqslant \lambda_3$$

and

$$\overline{\lambda} \leqslant \lambda_2^*.$$

Since λ_2^* is an eigenvalue λ_i, (ii) follows. □

3.3. *A functional form of the equation.* Let us suppose that Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^2$. For a given real number $\lambda > \lambda_1$, the solutions of (1.3) are the fixed points of the operator $T(\lambda, .)$ defined from $H^2(\Omega)$ into itself by $T(\lambda, v) = w$, where w is the unique $w \in H^1(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda v_+ & \text{a.e. in } \Omega, \\ w = -1 & \text{a.e. on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

From classical results of regularity, $w \in H^3(\Omega)$ and

$$T : (\lambda_1, +\infty) \times H^2(\Omega) \to H^2(\Omega) \text{ is compact.} \tag{3.14}$$

Let us suppose that v^* is a solution of (1.3).

D. Kinderlehrer and J. Spruck [7] have proved that the points $x \in \partial\Omega_p$ where $\nabla v^*(x) = 0$, are isolated and that elsewhere $\partial\Omega_p$ is locally a C^∞ manifold. Hence

$$\text{meas}\{ x \in \Omega \mid v^*(x) = 0 \} = 0. \tag{3.15}$$

From (3.15) (cf. R. Temam [19]), the application

$$H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

$$v \mapsto v_+$$

if Frechet differentiable in v^*, with differential

$$\varphi \mapsto H(v^*)\varphi,$$

where H is the Heaviside function (we remark that $H(v^*)$ is defined almost everywhere by virtue of (3.15)).

By the chain rule, the operator $T(\lambda, .)$ from $H^2(\Omega)$ into itself is Frechet differentiable in v^*, and its differential is the operator A defined from $H^2(\Omega)$ into

itself by $A\varphi = \Psi$, where Ψ is the unique function in $H_0^1(\Omega)$ such that

$$-\Delta\Psi = \lambda H(v^*)\varphi \qquad \text{a.e. in} \quad \Omega. \tag{3.16}$$

The operator $\tilde{A}$, the restriction of A to $H_0^1(\Omega)$, is self-adjoint in $H_0^1(\Omega)$ for the inner product $(\nabla., \nabla.)$. Thus, except zero, all the eigenvalues of $\tilde{A}$ are algebraically simple. Consequently, except zero, all the eigenvalues of A are algebraically simple.

Let us introduce γ_i, the eigenvalues of the Laplacian in $\Omega_p = \{x \in \Omega \mid v^*(x) > 0\}$, μ_i, the eigenvalues of the following problem: to find $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ such that, $\varphi \not\equiv 0$ and

$$-\Delta\varphi = \mu H(v^*)\varphi \qquad \text{a.e. in} \quad \Omega. \tag{3.17}$$

Obviously, the characteristic values of the operator A are equal to λ/μ_i, $i \geqslant 1$. It follows (cf. lemma 5.2) from $0 \leqslant H(v^*) \leqslant 1$ and from $H(v^*) < 1$ a.e. in a neighborhood of $\partial\Omega$ that $\lambda_i < \mu_i \ \forall i \geqslant 1$. Since the restriction of H to Ω_p is 1, it follows (cf. lemma 5.2) from $\overline{\Omega}_p \subset \Omega$ that $\mu_i < \gamma_i \ \forall i \geqslant 1$.

We have proved the important inequality:

$$\lambda_i < \mu_i < \gamma_i \qquad \forall i \geqslant 1, \tag{3.18}$$

where the eigenvalues are repeated with their geometrical multiplicity.

3.4. *Computation of a topological degree.* At first, let us suppose that Ω satisfies (1.1) $(1.2)_{\epsilon_1, r_1}$ where ϵ_1, r_1 are given by Lemma 3.3. Under this condition, parts (i) (ii) of our bifurcation theorem are proved and

$$\lambda_1 \leqslant \underline{\lambda} < \bar{\lambda}.$$

From results of D. G. Schaeffer [14], there exist $0 < \epsilon_0 \leqslant \epsilon_1$, $1 < r_0 \leqslant r_1$ such that, for any Ω satisfying (1.1) $(1.2)_{\epsilon_0, r_0}$, if (λ, v) is a symmetrical solution of (1.3) with $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$ and $v \not\equiv -1$, then Ω_p is disconnected.

Let us suppose finally that Ω is a given domain satisfying (1.1) $(1.2)_{\epsilon_0, r_0}$.

We denote (cf. Figure 2)

$$X = [\lambda_2, \lambda_3] \times H^2(\Omega),$$

$$\mathcal{S} = \{(\lambda, v) \in X, (\lambda, v) \text{ solution of (1.3)}\}$$

$$\mathcal{S}_1 = \{(\lambda, v) \in \mathcal{S}, v \not\equiv -1, v \text{ symmetrical function}\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1.$$

In order to prove the theorem by contradiction, let us suppose that there is no bifurcation of non-symmetric solutions on the branch $\mathcal{S}_1$.

Under this hypothesis, we now show that $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$ are compact subsets of X. If, for $n \to \infty$, we have

$$(\alpha_n, v_n) \in \mathcal{S}_1 \to (\alpha, v) \text{ in } X,$$

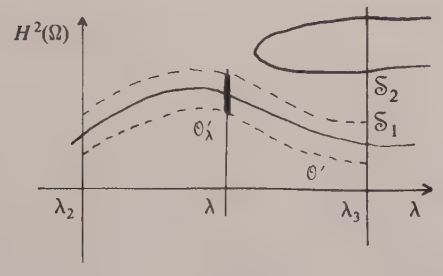


FIGURE 2.

then, by the Sobolev imbedding theorem,

$$v_n \to v \text{ in } C^0(\bar{\Omega}).$$

Thus $v \not\equiv -1$ follows from $v_{n+} \not\equiv 0$. Hence, $\mathcal{S}_1$ is a closed subset of $\mathcal{S}$ which is a compact subset of X by Lemma 3.1. Therefore, $\mathcal{S}_1$ is a compact subset of X.

Obviously, no sequence (α_n, v_n) with $v_n \equiv -1$ can converge to some $(\alpha, v) \in \mathcal{S}_1$. Thus, there is no bifurcation on the branch $\mathcal{S}_1$, i.e. for every $\lambda_2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_3$, there exists an open neighborhood V_λ of $(\lambda, v) \in \mathcal{S}_1$ in X such that

$$V_\lambda \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset.$$

We set $\mathcal{O} = \bigcup_{\lambda_2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_3} V_\lambda$. Since $\mathcal{O} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_1$ is an open subset of $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}_2$ a closed subset of $\mathcal{S}$; hence $\mathcal{S}_2$ is also a compact subset of X.

Thus the distance between $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$ is positive and there exists an open subset $\mathcal{O}'$ of X such that

$$\mathcal{O}' \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}_1, \qquad \partial\mathcal{O}' \cap \mathcal{S} = \emptyset. \tag{3.19}$$

We can now introduce, by virtue of (3.14) (3.19),

$$\mathcal{O}'_\lambda = \left\{ v \in H^2(\Omega) \text{ such that } (\lambda, v) \in \mathcal{O}' \right\}$$

and the topological degree of Leray-Schauder (cf.[12])

$$d(\lambda) = d(I - T(\lambda, .), \mathcal{O}'_\lambda, 0).$$

For λ given in $[\lambda_2, \lambda_3]$, the equation

$$v \in \mathcal{O}'_\lambda \text{ such that } T(\lambda, v) = v$$

has exactly one solution, denoted v^*, and the operator $T(\lambda, .)$ is differentiable in v^*, of differential A (cf. §3.3). If $I - A$ is injective, then the degree $d(\lambda)$ is equal to the index of the operator A (cf. [12]), which is given by

$$d(\lambda) = (-1)^\beta$$

where β is the number of distinct characteristic values of A located in $(0, 1)$ (by making use of the simplicity of the characteristic values).

(a) *Computation of* $d(\lambda_2)$. From (3.18) and from $\lambda = \gamma_1$ (cf. proof of Lemma 3.2),

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda = \gamma_1,$$

$$\lambda = \lambda_2 < \mu_2 < \gamma_2.$$

Hence $I - A$ is injective and $\beta = 1$. Therefore $d(\lambda_2) = -1$.

(b) *Computation of* $d(\lambda_3)$. For $\lambda = \lambda_3$, there exist two disjoint open sets ω_i such that $\Omega_p = \omega_1 \cup \omega_2$. Then, we have $\gamma_1 = \gamma_2$. Indeed, since $v^* \in C^1(\bar{\Omega})$ and $v^* = 0$ on $\partial\omega_i$, it follows that $v^*_{|\omega_i} \in H_0^1(\omega_i)$ (by lemma 2.1); hence both functions $v^*_{|\omega_i}$, $i = 1, 2$, are first eigenfunctions of the Laplacian in Ω_p. From (3.18)

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda = \gamma_1,$$

$$\lambda_2 < \mu_2 < \lambda = \gamma_2,$$

$$\lambda_3 = \lambda < \mu_3 < \gamma_3.$$

From these inequalities, it follows that $I - A$ is injective ($\mu_2 < \lambda < \mu_3$) and it follows that $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 < \lambda < \mu_3$. But, the first eigenvalue μ_1 is necessarily geometrically simple, i.e. $\mu_1 \neq \mu_2$. Hence $\beta = 2$ and $d(\lambda_3) = 1$.

(c) *Conclusion*. The result $d(\lambda_2) \neq d(\lambda_3)$ is in contradiction with the invariance of the degree by generalized homotopy (cf. [12]). Therefore, there exists a symmetrical solution (α, v) of (1.3) with $\lambda_2 \leqslant \alpha \leqslant \lambda_3, v \not\equiv -1$, and a sequence of non symmetrical solutions (α_n, v_n) of (1.3) with $v_n \not\equiv -1$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = v \text{ in } H^2(\Omega)$$

It can be proved[1] that a necessary condition of bifurcation is that 1 is eigenvalue of (3.17). We proved in (a) and (b) that it is not the case for $\lambda = \lambda_2$ or $\lambda = \lambda_3$. Therefore, the bifurcation occurs with $\lambda_2 < \alpha < \lambda_3$. Considering the sequence of non-symmetric solutions of (0.1)

$$u_n = \left(\alpha_n \int_\Omega v_{n+}\, dx\right)^{-1} \cdot v_n,$$

it is easy to show that

$$(\alpha_n, u_n) \to (\alpha, u) \text{ in } \mathbb{R} \times H^2(\Omega) \text{ for } n \to \infty,$$

where (α, u) is the symmetrical solution of (0.1)

$$u = \left(\alpha \int_\Omega v_+\, dx\right)^{-1} v.$$

The proof of the bifurcation theorem is complete. □

[1] unpublished result of R. Temam.

Remark 3.1. Let us suppose that Ω is a bounded smooth domain of $\mathbf{R}^q$ and that (λ, u) is a solution of (0.1). Then Ω_p has less than k connected componants where k is the smallest integer such that $\lambda \leqslant \lambda_k$. Indeed, if Ω_p has k connected components, then $\lambda = \gamma_1 = \cdots = \gamma_k$ and, by $\lambda_i < \gamma_i$, $\lambda < \lambda_k$. □

Remark 3.2. Our result of bifurcation can also be stated as follows: if Ω is a bounded smooth symmetrical domain of $\mathbf{R}^2$ such that

(a) $\lambda_3 \leqslant \lambda_2^*$,

(b) the set Ω_p, corresponding to the symmetrical solution for $\lambda = \lambda_3$, is disconnected, then

(i) the eigenvalue λ_2 is simple

(ii) there exists at least one bifurcation point in $[\lambda_2, \lambda_3] \times H^2(\Omega)$ of (0.1) on the branch of symmetrical solutions. □

4. Extension to general groups of isometries. We now rapidly discuss the case of domains $\Omega_\epsilon(n)$ as in Figure 3. For such domains, the eigenvalues of the Laplacian satisfy, for $\epsilon \to 0$,

$$\lambda_1 \sim \lambda_2 \cdots \sim \lambda_n \ll \lambda_{n+1} \sim \cdots \sim \lambda_{2n}$$

and the disconnectedness of the plasma invariant by rotation will occur only for $\lambda \geqslant \lambda_{n+1}$. The previous methods are not directly applicable, since the computation of $d(\lambda_{n+1})$ requires us to know if $\mu_1, \ldots, \mu_n$ are distinct or not.

In order to prove bifurcation in such domains, we shall use the following method. We suppose that the domain considered, Ω, is invariant under some group of isometries G and that there exists a subgroup H of G having the properties (i), (ii) below.

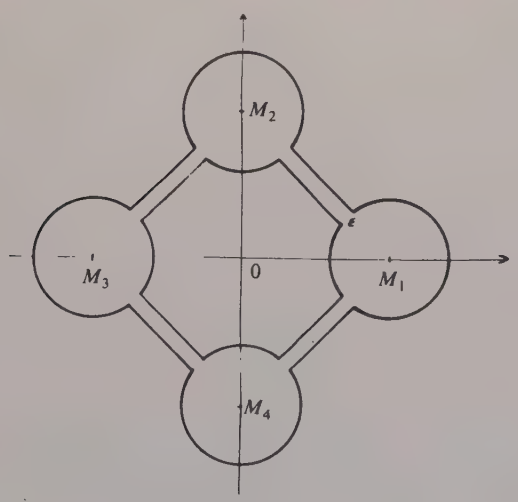


FIGURE 3.

We denote by λ_i^H (resp λ_i^G) the eigenvalues of the Laplacian on Ω corresponding to at least one eigenfunction invariant under H(resp. under G). We suppose that

(i) $\lambda_3^H \leqslant \lambda_2^G$

(ii) for $\lambda = \lambda_3^H$, the solution of (0.1) invariant under G is such that

$$\Omega_p = \omega_1 \cup \omega_2$$

where ω_i are disjoint open subsets of Ω, invariant under H.

Under these hypotheses, by using the method of §3 to the problem: to find u invariant under H solution of (0.1), it is easy to prove that $\lambda_2^H \neq \lambda_3^H$ and that there exists at least one point of bifurcation of (0.1) on the branch of solutions invariant under G.

Let us now come back to the situation of the Figure 3. Let P_n be a regular polyhedron of n sides (length a), whose vertices are denoted $S_n = \{M_1, \ldots, M_n\}$. We consider a domain $\Omega_\epsilon(n)$ consisting of the n balls $B(M_i, r)$, with $2r < a$, connected by n strips of thickness ϵ.

We choose for H a group (if there exists) *of isometries conserving S_n and such that, under H, S_n is divided into two orbits.* The existence of such a group depends on n. On one hand, for every even number ($n = 2m$), we can take

$$G = \left\{\text{rotations of angle } \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 1, \ldots, n\right\}$$

$$H = \left\{\text{rotations of angle } \frac{2k\pi}{m}, \quad k = 1, \ldots, m\right\}.$$

On the other hand, for some odd numbers n (for instance $n = 5$), we can prove that such a group does not exist.

In conclusion, if n is any even number of an odd number for which there exists H as above, then, for ϵ small enough, there exists at least one bifurcation point of (0.1) on the branch of solutions invariant under a rotation of angle $2\pi/n$.

5. Appendix. In this appendix are proved two properties of eigenvalues of elliptic problems with discontinuous coefficients.

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^q, q \geqslant 1$, a_{ij} and ρ be functions in $L^\infty(\Omega)$ such that

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \qquad \text{a.e. } x \in \Omega, \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} \text{there exists } \alpha > 0 \text{ such that} \\ \Sigma a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^q, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\rho(x) \geqslant 0 \qquad \text{a.e. } x \in \Omega, \tag{5.3}$$

there exists a non empty open subset ω of Ω such that
$\rho(x) > 0 \qquad \text{a.e. } x \in \omega.$ (5.4)

We call eigenvalues the real numbers λ corresponding to a function $u \not\equiv 0 \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \lambda \rho u \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{5.5}$$

The following result seems new: this is the convergence of eigenvalues with respect to a decreasing sequence of domains, the Hausdorff convergence of the domains not being required. For the proof, we follow a method of O. Pironneau-C. Saguez [10].

LEMMA 5.1. *If (Ω_n) is a sequence of bounded open subsets of $\mathbb{R}^q$ satisfying*
(i) $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n \ \forall n \geqslant 1$,
(ii) $\text{meas}\{\partial(\cap_{n\geqslant 1}\Omega_n)\} = 0$,
(iii) $\Omega = \text{int}(\cap_{n\geqslant 1}\Omega_n) \neq \emptyset$,
(iv) *$\partial\Omega$ is a C^1 manifold of $\mathbb{R}^q$ of dimension $q-1$, Ω is locally on only one side of $\partial\Omega$, and if a_{ij}, ρ are functions of $L^\infty(\Omega_1)$ satisfying (5.1) – (5.3) on Ω_1 and (5.4) on Ω, then the increasing sequences $(\lambda_k^n)_{k\geqslant 1}$ of eigenvalues of (5.5) in Ω_n satisfy*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = \lambda_k \qquad \forall k \geqslant 1,$$

where (λ_k) is the increasing sequence of eigenvalues of (5.5) in Ω. □

Proof. The inner products in $H_0^1(\Omega_n)$, $H_0^1(\Omega)$ are

$$((u,v))_n = \int_{\Omega_m} \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx,$$

$$((u,v)) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx.$$

For $u \in H_0^1(\Omega)$, we denote by $\tilde{u}$ the function equal to u in Ω, 0 in $\Omega_1\backslash\Omega$. It is known (cf. J. L. Lions [8]) that $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega_1)$ and that

$$\nabla\tilde{u} = \nabla u \text{ in } \Omega, \ 0 \text{ in } \Omega_1\backslash\Omega.$$

We denote by $(u_k^n)_{k\geqslant 1}$ an orthonormal system of eigenfunctions of (5.5) in $H_0^1(\Omega_n)$ corresponding to the sequence (λ_k^n). Let us suppose by induction that, for a fixed $l \geqslant 1$, there exists a subsequence $n' \to \infty$ and some eigenfunctions $(u_k)_{k=1}^{l-1}$ of (5.5) in Ω corresponding to $(\lambda_k)_{k=1}^{l-1}$ such that

$$\tilde{u}_k^n \to \tilde{u}_k \text{ in } H_0^1(\Omega_1) \qquad \forall k < l.$$

Using the compactness of the imbedding of $H_0^1(\Omega_1)$ in $L^2(\Omega_1)$,

$$\|u_l^n\|_n = \|\tilde{u}_l^n\|_1 = 1 \qquad \forall n \geqslant 1$$

implies the existence of a subsequence $n' \to \infty$ such that

$$\tilde{u}_l^n \to v \begin{cases} \text{in } H_0^1(\Omega_1) \text{ weak}, \\ \text{in } L^2(\Omega_1) \text{ strong}, \\ \text{a.e. in } \Omega_1. \end{cases}$$

By (i),

$$v = 0 \qquad \text{a.e. in} \quad \Omega_1 \setminus \bigcap_{n>1} \Omega_n,$$

and with (ii),

$$v = 0 \qquad \text{a.e. in} \quad \Omega_1 \setminus \Omega.$$

From (iv), the theorem of traces (cf. J. L. Lions [8]) on $\partial\Omega$ can be used:

$$u = v|_\Omega \in H_0^1(\Omega).$$

It is now standard, by making use of

$$\|u\| \leqslant \lim_{n' \to \infty} \|u_l^{n'}|_\Omega\| \leqslant 1$$

and

$$\lambda_l^n \leqslant \lambda_l^{n+1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_l,$$

to show that u is actually an eigenfunction of (5.5) in Ω corresponding to λ_l.

Hence

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_l^n = \lambda_l$$

and

$$\lim_{n' \to \infty} \tilde{u}_l^{n'} = \tilde{u}_l \qquad \text{in} \quad H_0^1(\Omega_1),$$

which proves the lemma. □

The monotonicity of eigenvalues with respect to the function ρ and to the domain Ω is easy to establish, even in case of discontinuous coefficients (for methods of proof, cf. R. Courant-D. Hilbert [3]). The strict monocity, stated in the Lemma 5.2 below, is more difficult to obtain; the precise statement is perhaps known, but we were unable to find it in the literature; the main argument in the proof is the principle of unique continuation.

LEMMA 5.2. *We suppose that* a_{ij}, $\rho \in L^\infty(\Omega)$ *satisfy* (5.1) – (5.4) *and*

$$\Omega \text{ is connected, } \partial\Omega \text{ is a } C^2 \text{ manifold of dimension } q-1, \quad \Omega \text{ is locally on one side of } \partial\Omega, \tag{5.6}$$

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}); \tag{5.7}$$

then

(i) *an eigenfunction of* (5.5) *cannot be a.e. equal to zero in a non empty open subset of* Ω,

(ii) *if* $\Omega' \subset \Omega$ *and* $\mathrm{int}(\Omega \backslash \Omega') \neq \emptyset$, *then*

$$\lambda_n < \lambda'_n \qquad \forall n \geqslant 1,$$

(iii) *if* $0 \leqslant \rho' \leqslant \rho$ *a.e. in* Ω *and* $\rho' < \rho$ *a.e. in a non empty open subset of* Ω, *then*

$$\lambda_n < \lambda'_n \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Proof. (i) Let $u \in H_0^1(\Omega)$ be an eigenfunction of (5.5). Since $\rho u \in L^2(\Omega)$, it follows from the regularity of solutions of the Dirichlet problem (cf. S. Agmon-A. Douglis-L. Nirenberg [1]) that $u \in H^2(\Omega)$. Since $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, (i) follows from the principle of unique continuation (cf. L. Hörmander [6], th. 8. 9. 1).

(ii) The part (ii) follows from (i) and from the following method of R. Courant-D. Hilbert [3]: we suppose that the kth eigenvalue in Ω and Ω' are equal for some k and we prove that no eigenvalue in Ω can be greater than λ_k, which is absurd.

At first we introduce

$$((u,v)) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx,$$

$$R(u) = \frac{\|u\|^2}{(\rho u, u)} \leqslant +\infty \qquad \text{(called the Rayleigh quotient).}$$

If Ω, a_{ij} and ρ satisfy (5.1)–(5.4), it is easy to obtain the following maximum-minimum property of eigenvalues (cf. R. Courant-D. Hilbert [3]): if V is any set such that

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega),$$

then the eigenvalues $(\lambda_m)_{m \geqslant 1}$ of (5.5) are given by

$$\lambda_m = \sup_{v_1, \ldots, v_{m-1} \in V} \left\{ \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} R(u) \quad \text{for} \quad ((u, v_i)) = 0, \quad i = 1, \ldots, m-1 \right\}. \tag{5.8}$$

By the hypothesis taken in (ii), there exists a ball

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \Omega \backslash \Omega'$$

We consider a sequence of open sets:

$$\Omega_n = \Omega \backslash B\left(x_0, \frac{r_0}{n}\right) \qquad n \geqslant 1,$$

which satisfy (5.6) and

$$\Omega' \subset \Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \cdots \subset \Omega.$$

By monotonicity, the kth eigenvalues on Ω_n are equal to λ_k. We denote by $u_n \in H_0^1(\Omega_n)$ the corresponding eigenfunctions, by $\tilde{u}_n$ the functions prolongated to Ω by 0 in $\Omega \backslash \Omega_n$.

Let m be any fixed number. In order to prove that $\lambda_m \leqslant \lambda_k$, it is sufficient (cf. (5.8)) to prove that for any $v_1, \ldots, v_{m-1} \in H^1(\Omega)$, there exists $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \not\equiv 0$, such that

$$((\varphi, v_1)) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-1, \qquad (\varphi) \leqslant \lambda_k.$$

We choose

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \tilde{u}_i.$$

The equations

$$((\varphi, v_i)) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-1,$$

are $m-1$ homogeneous linear equations for m unknowns (γ_i), hence there exists a non trivial solution (γ_i). By (i), the system $(\tilde{u}_i)$ is free, hence $\varphi \not\equiv 0$.

For $i \leqslant j$, we have

$$((\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)) = \lambda_k(\rho \tilde{u}_i, \tilde{u}_j),$$

because $\tilde{u}_i \in H_0^1(\Omega_j)$ and u_j is an eigenfunction on Ω_j.

Hence $R(\varphi) = \lambda_k$, which proves (ii).

(iii) We follow the method of proof of (ii), but there are some supplementary technical difficulties.

By hypothesis, there exists a ball $B(x_0, r_0)$ such that

$$\rho'(x) < \rho(x) \qquad \text{a.e.} \quad x \in B(x_0, r_0).$$

We consider the increasing sequence of balls B_n:

$$B_n = B\left(x_0, r_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right)$$

and the increasing sequence of functions $\rho_n \in L^\infty(\Omega)$:

$$\rho_n = \rho \quad \text{on} \quad B_n, \quad \rho' \quad \text{elsewhere.}$$

If the kth eigenvalues are equal for ρ and ρ', then, by monotonicity, that is the same for all ρ_n. We denote by u_n the corresponding eigenfunctions.

Let m be any fixed number and $v_1, \ldots, v_{m-1} \in H^1(\Omega)$. We choose $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i$. if we can prove that (u_i) is a free system and that $R(\varphi) \leqslant \lambda_k$, then (iii) will be proved.

(a) (u_i) *is a free system*. Since

$$((u_i, v)) = \lambda_k(\rho_i u_i, v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{5.9}$$

if $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = 0$ for some reals α_i, then

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \rho_i u_i = 0$$

and

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\rho_i - \rho') u_i = 0.$$

Hence

$$\alpha_p u_p = 0 \qquad \text{a.e. in} \quad B_p \setminus B_{p-1},$$

which implies $\alpha_p = 0$ because of (i); hence (a) by induction.

(b) $R(\varphi) \leqslant \lambda_k$.

By (5.9), we have

$$((\rho_i - \rho_j)u_i, u_j) = 0 \qquad \forall i, j. \tag{5.10}$$

For any sequence (γ_i), we introduce a function ϕ on $\bigcup_{n \geqslant 1} B_n$ by

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{on} \quad B_1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \gamma_i u_i & \text{on} \quad B_{j+1} \setminus B_j \end{cases}$$

By a computation on $B_{n+1} \setminus B_n$ using (5.10), one proves by induction on n that

$$\sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i \gamma_j \int_{B_n} (\rho - \rho_i) u_i \cdot u_j \, dx = \int_{B_n} (\rho - \rho') \phi^2(x) \, dx. \tag{5.11}$$

For any m and $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i$, we have

$$\lambda_k(\rho\varphi, \varphi) - \|\varphi\|^2 = \lambda_k \left\{ \sum_{i,j=1}^{m} \gamma_i \gamma_j (\rho u_i, u_j) - \sum_{i,j=1}^{m} \gamma_i \gamma_j (\rho_i u_i, u_j) \right\}$$

$$= \lambda_k \left\{ \int_{\Omega \setminus B_m} (\rho - \rho') \phi^2 \, dx + \sum_{i,j=1}^{m} \gamma_i \gamma_j \int_{B_m} (\rho - \rho_i) u_i u_j \, dx \right\}$$

which is not less than zero by (5.11). Hence $R(\varphi) \leqslant \lambda_k$. ∎

Remark 5.1. Part (ii) and (iii) of Lemma 5.2 could also be proved by making use of differential properties of eigenvalues with respect to the coefficients. (cf. P. R. Garabedian-M. Schiffer [5], B. Rousselet [13]).

References

1. S. Agmon, A Douglis, and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Comm. Pure Applied Math. **12** (1959), 623–727.
2. H. Berestycki and H. Brezis, *On a free boundary problem arising in plasma physics*, to appear in Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications.
3. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, New York, Interscience Publishers, 1953.
4. A. Dervieux, Rapport INRIA (Le Chesnay, France) **18** (1980).
5. P. R. Garabedian and M. Schiffer, *Variational problems in the theory of elliptic partial differential equations*, J. of Rat. Mech. and Analys. (1953), 137–171.
6. L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, New York, 1963.
7. D. Kinderlehrer and J. Spruck, *The shape and smoothness of stable plasma configurations*, Annali. Scu. Norm. Pisa, **5** (1978), 131–148.
8. J. L. Lions, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montréal, sec. ed. 1965.
9. B. Nicolaenko and R. Temam, to appear.
10. O. Pironneau and C. Saguez, *Asymptotic behavior, with respect to the domain, of solutions of partial differential equations*, Rapport LABORIA (Le Chesnay, France) **218** (1977).
11. J. P. Puel, *Un problème de valeurs propres non linéaires et de frontière libre*, lecture notes **76016**, University of Paris, 1976.
12. P. H. Rabinowitz, *Théorie du degré topologique et application à des problèmes aux limites non linéaires*, lecture notes **75010**, University of Paris, 1975.
13. B. Rousselet, *Identification de domaines et problèmes de valeurs propres*, thèse de 3ème cycle, Université de Nice, 1977.
14. D. G. Schaeffer, *Non uniqueness in the equilibrium shape of a confined plasma*, Comm. in P. D. E., **2** (6), (1977), 587–600.
15. M. Sermange, *Une méthode numérique en bifurcation, Application à un problème à frontière libre de la physique des plasmas*, Applied Math. and Optim., **5**, (1979), 127–151.
16. J. Sijbrand, *Computation of the bifurcation solutions of a class of problems with a free boundary*, lecture notes **90**, University of Utrecht, 1978.
17. ———, *Bifurcation analysis for a class of problems with a free boundary*, lecture notes **91**, University of Utrecht, 1978.
18. G. Stampacchia, *Equations Elliptiques de second ordre à coefficients discontinus*, Presse de L'Université de Montréal, 1962.
19. R. Temam, *Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics*, Comm. in P. D. E., **2** (6), (1977), 563–585.

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt BP 105, 78150 Le Chesnay, France

CHAPITRE IV

NON CONVEX METHODS FOR COMPUTING FREE BOUNDARY EQUILIBRIA OF AXIALLY SYMMETRIC PLASMAS

Bernard HERON[*], *Michel SERMANGE*[**]

ABSTRACT. - This paper analyses the convergence of an iteration scheme adapted to a class of nonconvex problems where the functional to be minimized is the difference between two convex functions. These problems include a mathematical description of free boundary equilibria for axially symmetric plasmas governed by equations containing *discontinuous nonlinear terms*. A Galerkin method is used to discretize these partial differential equations in the space-variables. Numerical computations are performed on examples via a finite element method.

RESUME. - Cet article analyse la convergence d'un schéma itératif adapté à une classe de problèmes non convexes où la fonctionnelle à minimiser est la différence de deux fonctions convexes. Ces problèmes incluent la description mathématique d'un plasma à frontière libre en équilibre axisymétrique gouverné par des équations comportant des *termes non linéaires discontinus*. Ces équations aux dérivées partielles sont discrétisées en variable d'espace par une méthode de Galerkin. Des calculs numériques sont effectués sur des exemples par la méthode des éléments finis.

* Université de Paris XI, Centre d'Orsay, Bâtiment 425, F91405 ORSAY CEDEX

** I.N.R.I.A., Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, F78153 LE CHESNAY CEDEX

0. - INTRODUCTION.

As it was pointed out independently in two papers (H. BREZIS-H. BERESTYCKI [3] and one of the authors (M.S.) [17]), there exists a very efficient iteration scheme for computing general free boundary equilibria of axially symmetric plasmas. In [3], it is proved that for any initialization some subsequence converges to a solution, whilst in [17],[18] local convergence around variational solutions is proved and numerical computations are performed (including a bifurcation case).

The aim of this paper is to improve the mathematical background of this scheme and to show that it can be generalized to other problems.

The paper begins with the study of the abstract subdifferential problem of finding u such that

$$(0.1) \qquad \partial F(u) \cap \partial G(u) \neq \emptyset \ ,$$

where F and G are both convex functions and $\partial F(u)$ denotes the subdifferential of F at u.

We are interested in questions of existence and approximation of solutions of (0.1). The duality theory (non convex duality) for these problems was first studied by J.F. TOLAND (cf. [23],[24]).

In Section 1, we prove the existence of at least one solution for (0.1) without assuming J = G-F to be bounded from below ; then we generalize the iteration scheme quoted before and prove its convergence to a solution of (0.1) for all initializations. As far as we know, these results are new (a more restrictive framework was considered by the second author in [18]).

In Section 2, using an internal approximation of the space (which includes Galerkin method and finite elements), we define an approximation of the abstract subdifferential problem (0.1) and prove its convergence. We also give the discrete analogue of the continuous iteration scheme.

In Section 3, we study the general set-valued equation

$$(0.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}u \in \partial_s \, \phi(\cdot, u(\cdot)) \text{ in } \Omega, \\ u = \text{const. (unknown) on } \Gamma = \partial\Omega, \\ -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{L}}} \, d\sigma = I, \end{cases}$$

where I is a prescribed constant, $\mathcal{L}$ an elliptic operator and $\phi(x,s)$ a function which is convex with respect to s. Sec. 1 and 2 yield the existence of at least one solution and the convergence of an iteration scheme for Eq. (0.2). This problem (resp. the associated iteration scheme) differs from the set-valued equations studied in other papers (see for instance K.C. CHANG [4]-[6], I. MASSABO [12], I.M. and C.A. STUART [13]) mainly by the nature of the prescribed data (the integral of the conormal derivative is given instead of the value of u on Γ).

The remaining part of the paper is devoted to physical applications. The main one (Sec. 4) is the determination of free boundary plasma axisymmetric equilibria by solving STOKES-GRAD-SHAFRANOV equation, which is a special case of Eq. (0.2). Even in the case of set-valued nonlinear terms $\partial_s\phi$, we obtain the existence of solutions and the convergence of an iteration scheme ; that way, we improve the existence results of R. TEMAM [21], H. BERESTYCKI-H. BREZIS [2], J.P. PUEL [14] and approximation results of H. BERESTYCKI-H. BREZIS [3] which were all proved assuming the continuity of ϕ_s'. Let us mention that R. CIPOLATTI also uses convexity methods in [8] to study $-\Delta u = \lambda P_K(u)$ (where K is some convex set of functions) which generalizes the plasma model-problem $-\Delta u = \lambda u_+$. As other application, we present in Sec. 5 a convergent iteration scheme for computing the shape of a heavy rotating string (cf. I.I. KOLODNER [10], J.F. TOLAND [24]). Both applications are illustrated by numerical results. Many other applications are expected.

1. - AN ABSTRACT SUBDIFFERENTIAL PROBLEM.

1.1. The abstract framework.

This section is devoted to the non-standard problem of finding points where the subdifferentials of two convex functions have a non-empty intersection. Our most interesting result is an algorithm for computing solutions of such a problem. We first prove the existence of solutions through the closely related problem of minimizing the difference between the two convex functionals on a non-convex set. We then propose an algorithm and study it.

The abstract framework of this study is the following.

Given a reflexive Banach space $(V,\|\cdot\|)$, Z a closed subspace of V (which can be $\{0\}$) and F,G two functionals on V, we assume that

(1.1) F is convex, weakly continuous on V,

(1.2) G is convex, continuous on V,

(1.3) G is invariant by translation with respect to Z,

(1.4) there exists $\alpha > 0$ such that for all $u, v \in V$ and all $L \in \partial G(u)$

$$G(u+v) - G(u) \geq L(v) + \alpha \|\dot{v}\|^2_{V/Z} \quad (1).$$

Then, the problem we consider is that of finding $u \in V$ such that

(1.5) $\partial F(u) \cap \partial G(u) \neq \emptyset$.

This problem will be often referred to as problem (1.5) for simplicity. The following remark helps us to locate the solutions of this problem if there are any.

Remark 1.1 : It is easy to check that assumption (1.3) is equivalent to

(1.3)' for all $v \in V$, $\partial G(v) \subset Z^o$. (2)

Moreover this condition (that disappears if $z = \{0\}$) allows us to consider G as a continuous convex functional on V/Z which is even strictly convex due to (1.4). ■

If u is any solution of (1.5), it is now clear that $\partial F(u) \cap Z^o$ is not empty. As a consequence, u necessarily belongs to the set

(1.6) $K = \{v \in V : F(v) \leq F(v+z) \text{ for all } z \in Z\}$.

As we shall see problem (1.5) is closely related to the minimization problem

(1.7) $\inf_{v \in K} \{G(v) - F(v)\}$

when a few additional coercivity conditions are met.

---

(1) The quotient space V/Z is a Banach for the norm $\|\dot{v}\|_{V/Z} = \inf_{z \in Z} \|v+z\|$

(2) The polar set Z^o of the subspace Z is given by

$$Z^o = \{L \in V^* : L(z) = 0 \text{ for all } z \in Z\}$$

where V^* denotes the dual space of V.

These assumptions are

(1.8) for each $v \in V$, $F(v+z) \to +\infty$ when $z \in Z$, $\|z\| \to +\infty$,

(1.9) the functional $J = G-F$ is bounded from below on K,

(1.10) $\begin{cases} \text{the set } K \text{ is bounded in } V \\ \text{or } J(v) \to +\infty \text{ when } v \in K, \ \|v\| \to +\infty . \end{cases}$

Remark 1.2 : Concerning the terminology, we shall refrain from calling the solutions u of $\partial F(u) \cap \partial G(u) \neq \emptyset$ the critical points of $J = G-F$ (as did J.F. TOLAND in [24]) because this property depends on the decomposition $J = G-F$, as it was pointed out by K.C. CHANG [6].

Quadratic case for G.

Let $G(v) = \frac{1}{2} a(v,v)$ be a functional on V satisfying the classical conditions

i) $(V, \|\cdot\|)$ and $(H, |\cdot|)$ are Banach spaces ; V is reflexive and compactly embedded in H.

ii) $a(\cdot,\cdot)$ is a bilinear form on V which is continuous, symmetric, nonnegative and satisfies the coercivity condition

(1.11) $\begin{cases} \text{there exist real constants } \lambda \geq 0, \ C > 0 \text{ such that for all } v \in V \\ a(v,v) + \lambda |v|^2 \geq C \|v\|^2 . \end{cases}$

We shall see below that i)-ii) yield

iii) the null space Z of $a(\cdot,\cdot)$ is $\{0\}$ or finite dimensional,

iv) there exists $\alpha > 0$ such that for all $v \in V$

$$a(v,v) \geq \alpha \|\dot{v}\|^2_{V/Z} .$$

It is then clear that relations (1.2)-(1.4) are fulfilled since every quadratic functional G satisfies

$$G(u+v) - G(u) - G'(u)v = G(v).$$

In this framework relation (1.5) becomes

(1.5)' $\quad a(u,\cdot) \in \partial F(u)$

which is equivalent to the variational inequality

(1.5)" $\quad a(u,v) \leq F(u+v)-F(u)$ for all $v \in V$.

And in the particular case of a differentiable F, (1.5)' means $a(u,\cdot) = F'(u)$.[1]

Let us now prove iii)-iv). Because of the embedding $V \subset H$ and inequality (1.11), the norms on V and H are equivalent on Z. The identity operator on Z is therefore compact due to i), which yields iii) (cf. M. SCHECHTER [15]).

We argue by contradiction to prove iv). Assume that a sequence $\{\dot{v}_n\}$ satisfies

$$\|\dot{v}_h\| = 1 \ , \ a(\dot{v}_n,\dot{v}_n) < \frac{1}{n} \ .$$

In each class $\dot{v}_n$, we can select v_n such that

(1.12) $\quad 1 \leq \|v_n\| \leq 2 \ , \ a(v_n,v_n) < \frac{1}{n} \ .$

By compactness, some subsequence $\{v_{p(n)}\}$ converges weakly in V and strongly in H to some $u \in V$. The weak lower semi-continuity of convex continuous functionals yields

$$a(u,u) \leq 0 = \lim \inf a(v_{p(n)},v_{p(n)}).$$

Since $a(\cdot,\cdot)$ is nonnegative, u belongs to Z. Then, applying relation (1.11) to $(v_{p(n)}-u)$ we get

$$a(v_{p(n)},v_{p(n)}) + \lambda|v_{p(n)}-u|^2 \geq C\,\|v_{p(n)}-u\|^2 \geq C\,\|\dot{v}_{p(n)}\|^2_{V/Z}$$

and letting $n \to +\infty$, we infer from this and (1.12) that

---

([1]) This case was previously studied in [18] with $a(\cdot,\cdot)$ taken definite positive.

$$\liminf |v_{p(n)}-u|^2 \geq \frac{C}{\lambda} > 0$$

in contradiction with the strong convergence of $v_{p(n)}$ to u.

Remark 1.3 : It should be noted that hypotheses (1.9)-(1.10) only involve the behaviour of the functional J on K. There is indeed no global property of coercivity, since according to (1.3) and (1.8) we have $\lim_{\substack{z\in Z \\ \|z\|\to+\infty}} J(v+z) = -\infty$ for all $v \in V$.

1.2. Two lemmas.

Hereinafter, a key-role is played by the following lemma

Lemma 1.1 : *Let F,G be two functionals on a Banach space V. We assume that two points v_1, v_2 of V satisfy*

$$\partial F(v_1) \cap \partial G(v_2) \neq \emptyset.$$

If we set J = G-F, we then have

$$J(v_1) \geq J(v_2).$$

Moreover if Z is a closed subspace of V and if relation (1.4) is fulfilled, one has

$$J(v_1) \geq J(v_2) + \alpha \|\dot{v}_1 - \dot{v}_2\|^2_{V/Z} .$$

We shall also need a characterization of the set K (defined by (1.6)) given by

Lemma 1.2 : *Let F be a convex continuous functional on a Banach space V, Z a closed subspace of V and Z^o its polar set. For any $u \in V$ the conditions*

i) $F(u) \leq F(u+z)$ for all $z \in Z$ (i.e. $u \in K$)

ii) $\partial F(u) \cap Z^o \neq \emptyset$

are equivalent.

Proof of lemma 1.1 :

Taking $L \in \partial F(v_1) \cap \partial G(v_2)$, we have

$$F(v_2) \geq F(v_1) + L(v_2 - v_1),$$

$$G(v_1) \geq G(v_2) + L(v_1 - v_2),$$

and adding these inequalities we obtain $J(v_1) \geq J(v_2)$. Furthermore, if G satisfies relation (1.4), replacing the second inequality by (1.4) we immediately get

$$J(v_1) \geq J(v_2) + \alpha \| \dot{v}_1 - \dot{v}_2 \|^2_{V/Z} . \blacksquare$$

Proof of lemma 1.2

It is a straightforward consequence of Hahn-Banach's theorem. Though a justification can be found in K.C. CHANG [4] we give here some more details.

Assume $\partial F(u) \cap Z^o$ is not empty, and let L be any element of this set. Since

$$F(u+v) \geq F(u) + L(v) \text{ for all } v \in V,$$

$$L(z) = 0 \text{ for all } z \in Z,$$

it is obvious that $F(u) \leq F(u+z)$ for all $z \in Z$.

Conversely, assume that i) is fulfilled. The convex functional $\tilde{F}$ defined on V by

$$\tilde{F}(v) = F(u+v) - F(u)$$

clearly satisfies[1]

$$Z \times \{0\} \cap \overset{\circ}{\text{epi}\ \tilde{F}} = \emptyset.$$

Hahn-Banach's theorem asserts that there is a closed hyperplane π of $V \times \mathbb{R}$ such that

---

[1] epi $\tilde{F} = \{(v,t) \in V \times \mathbb{R} : \tilde{F}(v) \leq t\}$ and we denote by $\overset{\circ}{S}$ the interior of a set S.

(1.13) $\quad Z\times\{0\}\subset\pi$ and $\pi\cap\overset{\circ}{\widetilde{\text{epi}\ F}}=\emptyset$.

Let $L\in V^*$, $\alpha\in\mathbb{R}$ such that

$$(v,t)\in\pi \iff L(v)-\alpha t = 0.$$

It follows from (1.13) that $L\in Z^o$ and $L(v)-\alpha t$ is never zero on $\overset{\circ}{\widetilde{\text{epi}\ F}}$, thus keeps its sign unchanged, say the negative one. We easily get that $\alpha > 0$ and

$$L(v) \le \alpha \inf_{(v,t)\in \text{epi}\ \tilde{F}} t = \alpha\tilde{F}(v).$$

Therefore $\frac{1}{\alpha}L$ belongs to $\partial F(u)\cap Z^o$. The lemma is proved. ■

1.3. Existence of solutions for problem (1.5).

In the framework specified in Sec. 1.1, we have the following existence result concerning problem (1.5).

Theorem 1.1: *Assume that conditions* (1.1)-(1.4) *are fulfilled. Under assumption* (1.8) *the set* K *defined by* (1.6) *is not empty, and if problem* (1.7) *admits solutions, all of them satisfy* (1.5). *Since they have a minimum property, we shall call them variational solutions of* (1.5).

If we assume moreover that conditions (1.9)-(1.10) *are satisfied, there is at least one solution of the minimization problem* (1.7), *and therefore at least one (variational) solution of problem* (1.5).

Proof of theorem 1.1 :

Let us first check that the set K is not empty. Given $v\in V$, it is classical that the minimization problem

(1.14) $\quad \inf_{z\in Z} F(v+z)$

has always a solution since Z (as well as V) is reflexive, and F is weakly continuous and satisfies (1.8). As a consequence, we have

(1.15) for each $v\in V$, there exists $z\in Z$ such that $v+z\in K$.

So, K is obviously not empty.

Suppose now that u is a solution of problem (1.7). Since we have $u\notin K$, Lemma 1.2 allows us to choose $L\in\partial F(u)\cap Z^o$; let us introduce a new minimization problem

$$\inf_{v\in V} \{G(v)-L(v)\}$$

Since the functional (G-L) is invariant under addition of an element of Z to the variable v, we may consider this problem as defined on V/Z. The reflexivity of V yields that of the quotient space V/Z ; the functional (G-L) is convex, continuous on V/Z and coercive i.e. $\lim_{\|\dot{v}\|\to+\infty} (G(\dot{v})-L(\dot{v})) = +\infty$. Concerning this last property we have indeed

$$G(v) \geq G(0) + L_o(v) + \alpha\|\dot{v}\|^2_{V/Z}$$

by application of (1.4) with $L_o \in \partial G(0)$, so that

$$G(\dot{v})-L(\dot{v}) \geq G(0) + \alpha\|\dot{v}\|^2_{V/Z} - \|L-L_o\|\,\|\dot{v}\|_{V/Z}$$

whence the coercivity follows.

The minimization problem

$$\inf_{\mathcal{V}\in V/Z} (G(\mathcal{V})-L(\mathcal{V})) \tag{1.16}$$

is of the same classical kind as (1.14). It has a solution $\mathcal{U}$, and this solution is unique by strict convexity (see Remark 1.1). We now prove that $\mathcal{U} = \dot{u}$ and $L \in \partial G(u) \cap \partial F(u)$.

It follows from (1.16) that for any $w \in \mathcal{U}$ we have $L \in \partial G(w)$. Thanks to property (1.15) we may suppose $w \in K \cap \mathcal{U}$; since u is a solution of (1.7), we have $J(u) \leq J(w)$. On the other hand, since $L \in \partial F(u) \cap \partial G(w)$ we get by lemma 1.1 $J(w)+\alpha\|\dot{u}-\dot{w}\|^2_{V/Z} \leq J(u)$. It turns out that $\dot{u}=\dot{w}$, and as we saw before this yields $L \in \partial G(u)$; hence u satisfies (1.5).

Concerning the second part of the theorem, let $\{u_n\}$ be a minimizing sequence for J on the set K. Such a sequence is bounded in V due to (1.9)-(1.10). By reflexivity, there is a subsequence $\{u_{n_k}\}$ that weakly converges to some $u \in V$. Let us show that u is a solution of (1.7). First of all, we have $u \in K$. It is indeed clear from (1.1) and (1.6) that K is weakly closed. Moreover, it follows at once from (1.1)-(1.2) that J is weakly l.s.c. (lower semi-continuous) as the sum of two weakly l.s.c. functionals, so that $J(u) \leq \liminf J(u_{n_k})$. Since $u \in K$, we get $J(u) = \inf_{v\in K} J(v)$ as announced. ∎

1.4. Approximation of solutions of problem (1.5).

The method we used to prove theorem 1.1 ensures that a solution (even a variational solution) of problem (1.5) exists, but it does not enable us to compute it. We now study an algorithm that makes possible an effective computation of solutions. It also provides an alternative proof of theorem 1.1 as a by-result.

Iteration scheme.

The starting point is some $u_1 \in K$; once $u_1 \in K, \ldots, u_n \in K$ have been obtained we get $u_{n+1} \in K$ in the following way.

Step 1 : let L_n be any element of the (non empty convex) set $\partial F(u_n) \cap Z^o$; we define $\mathcal{U}_{n+1} \in V/Z$ as the solution of the minimization problem

$$\inf_{\mathcal{U} \in V/Z} \{G(\mathcal{U}) - L_n(\mathcal{U})\}$$

Step 2 : then we take for u_{n+1} a solution of the minimization problem

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{n+1}} F(u).$$

Remark 1.4 : In the quadratic case previously described, $\mathcal{U}_{n+1} \in V/Z$ is defined by $a(\mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{V}) = L_n(\mathcal{V})$ for all $\mathcal{V} \in V/Z$.

Assumptions (1.1)-(1.4) and (1.8)-(1.10) grant that for any choice of $u_o \in K$ we can construct a sequence $\{u_n\}$ with this algorithm. The arguments are the same as in the proof of theorem 1.1.

Concerning such a sequence we have the following convergence result

Theorem 1.2 : *Assume that hypotheses* (1.1)-(1.4) *and* (1.8)-(1.10) *are fulfilled. Then, every sequence* $\{u_n\}$ *obtained through the above mentioned algorithm is bounded and has at least one weakly convergent subsequence. The limit* u *of any weakly convergent subsequence* $\{u_{n_k}\}$ *is a solution of problem* (1.5). *Moreover, the sequence* $\{\dot{u}_{n_k}\}$ *converges strongly to* $\dot{u}$ *in* V/Z *and the corresponding sequence* $\{L_{n_k}\}$ *admits a subsequence that converges strongly in* V^* *to some* $L \in \partial F(u) \cap \partial G(u)$.

Proof : From the first step of the algorithm we infer that $L_n \in \partial G(u_{n+1})$ so that $L_n \in \partial F(u_n) \cap \partial G(u_{n+1})$. Lemma 1.1 then yields

$$(1.17) \qquad J(u_{n+1}) + \alpha \| \dot{u}_n - \dot{u}_{n+1} \|^2_{V/Z} \leq J(u_n).$$

It turns out that the sequence $\{J(u_n)\}$ decreases. But it is bounded from below according to (1.9) and therefore converges. Thanks to assumption (1.10) the boundedness of $\{J(u_n)\}$ yields that of $\{u_n\}$. By reflexivity of V, there is a subsequence $\{u_{n_k}\}$ that converges weakly and its limit u belongs to K since K is weakly closed. In order to show that u is a solution of (1.5), we mainly use two properties of the sequence $\{L_n\}$ which are

i) the sequence $\{L_n\}$ is bounded in V^*,
ii) $\lim L_n(v_n) = 0$ for any sequence $\{v_n\}$ weakly converging to 0.

Let us draw the consequences of i)-ii) before proving them. Thanks to i) we may suppose (modulo extraction of another subsequence) that L_{n_k} weakly converges to some $L \in V^*$. Since $L_{n_k} \in \partial G(u_{n_k+1}) \cap \partial F(u_{n_k})$ we have

$$(1.18) \qquad F(u_{n_k}+v) \geq F(u_{n_k}) + L_{n_k}(v) \text{ for all } v \in V,$$

$$(1.19) \qquad G(v+u_{n_k+1}-u_{n_k}) \geq G(u_{n_k+1}) + L_{n_k}(v-u_{n_k}) \text{ for all } v \in V.$$

We want to pass to the limit in (1.18) and (1.19) in order to prove that $L \in \partial F(u) \cap \partial G(u)$. From i) and (1.18) we get

$$F(u+v) \geq F(u) + L(v) \text{ for all } v \in V$$

that is to say $L \in \partial F(u)$.

To deal with (1.19) we use ii) and consider G as a convex continuous functional on V/Z. Since the sequence $\{J(u_n)\}$ converges we infer from (1.17) that $\lim \| \dot{u}_n - \dot{u}_{n+1} \|_{V/Z} = 0$. Thus, in the space V/Z $\dot{u}_{n_k} - \dot{u}_{n_k+1} \to 0$ strongly and $\dot{u}_{n_k+1} \to \dot{u}$ weakly, which yields

$$(1.20) \qquad \begin{cases} \lim G(\dot{v} + \dot{u}_{n_k+1} - \dot{u}_{n_k}) = G(\dot{v}), \\ \lim \inf G(\dot{u}_{n_k+1}) \geq G(\dot{u}). \end{cases}$$

It is then clear from (1.19), (1.20) and ii) that

$$G(v) \geq G(u)+L(v-u)$$

or else $L \in \partial G(u)$. We have shown that $L \in \partial F(u) \cap \partial G(u)$ i.e. u is actually a solution of problem (1.5).

Proof of i). For each $v \in V$ we have

$$(1.21) \qquad |L_n(v)| \leq \max\,(F(u_n+v)-F(u_n), F(u_n-v)-F(u_n))$$

so that $\|L_n\| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} (F(u_n+v)-F(u_n))$. But the sequence $\{u_n\}$ is bounded in V, say by M, and the ball $\{v : \|v\| \leq M+1\}$ is weakly sequentially compact in V. The image of this ball by F is compact because F is weakly continuous. This proves i).

Proof of ii). Just take $v=v_n$ in (1.21) and apply the weak continuity of F.

Let us prove now that $\dot{u}_{n_k}$ converges strongly to $\dot{u}$ in the quotient space V/Z. We argue by contradiction, and suppose that some subsequence $\dot{u}_{n'_k}$ satisfies $\|\dot{u}-\dot{u}_{n'_k}\|_{V/Z} \geq \varepsilon > 0$. Then, according to (1.4) we have

$$G(u+u_{n'_k+1}-u_{n'_k}) \geq G(u_{n'_k+1})+L_{n'_k+1}(u-u_{n'_k})+\alpha\varepsilon^2.$$

Letting $n'_k \to +\infty$ and repeating previous arguments we get

$$G(u) \geq G(u)+\alpha\varepsilon^2$$

which contradicts $\varepsilon > 0$. The whole sequence $\{\dot{u}_{n_k}\}$ therefore converges strongly to u in the quotient space V/Z.

Finally, the last part of theorem 1.2 follows directly from the property

iii) given a reflexive Banach space V, if a sequence $\{L_n\}$ of V^* converges weakly to 0 and satisfies ii), then $\{L_n\}$ converges strongly to 0.

Proof of iii) : By the weak sequential compactness of the ball $\mathcal{B} = \{v \in V, \|v\| \leq 1\}$, for each L_n we get $v_n \in \mathcal{B}$ such that $\|L_n\| = L_n(v_n)$. If the sequence $\{\|L_n\|\}$ does not tend to 0, there exist $\varepsilon > 0$ and a subsequence $\{n_k\}$ such that $\|L_{n_k}\| \geq \varepsilon$ for all k and $\{v_{n_k}\}$ converges weakly to some $v \in V$. Since L_{n_k} converges weakly to 0 and satisfies ii), it follows from

$$\|L_{n_k}\| = L_{n_k}(v_{n_k} - v) + L_{n_k}(v)$$

that $\lim \|L_{n_k}\| = 0$ in contradiction with $\varepsilon > 0$. We thus have $\lim_{n \to +\infty} \|L_n\| = 0$. ■

Remark 1.5 : If the space Z is finite dimensional the strong convergence of $\{\dot{u}_{n_k}\}$ in V/Z yields that of $\{u_{n_k}\}$ in V. In this case, the strong and weak topologies are indeed equivalent on Z which admits moreover a topological complement isomorphic to V/Z (cf. L. SCHWARTZ [16]).

Corollary 1.1 : *Assume that hypotheses* (1.1)-(1.4) *and* (1.8)-(1.10) *are fulfilled and that problem* (1.5) *admits only finitely many solutions. Let* $\{u_n\}$ *be a sequence obtained with the above mentioned algorithm. The whole sequence converges weakly to a solution* u *of problem* (1.5) *in* V, *whereas the sequence* $\{\dot{u}_n\}$ *converges strongly to* $\dot{u}$ *in the quotient space* V/Z. *Moreover, if the space* Z *is finite dimensional the sequence* $\{u_n\}$ *itself converges strongly.*

Proof : Let us prove first that the whole sequence $\{\dot{u}_n\}$ converges ; to do this, we shall use three properties of this sequence. We know by theorem 1.2 that cluster values of $\{u_n\}$ are solutions of problem (1.5). They form a finite set by assumption, and the cluster values of $\{\dot{u}_n\}$ are their projections in V/Z so that

i) the sequence $\{\dot{u}_n\}$ has only finitely many cluster values.

It also follows easily from theorem 1.2 that

ii) the sequence $\{\dot{u}_n\}$ forms a relatively compact set in V/Z (strong).

Moreover, it appears in the proof of this theorem that

iii) $\lim_{n \to +\infty} \|\dot{u}_n - \dot{u}_{n+1}\|_{V/Z} = 0.$

Let us check that properties i)-iii) yield the strong convergence of $\{\dot{u}_n\}$ in V/Z. We denote by $\mathcal{U}_j$, j=1,2,...,p the cluster values of $\{\dot{u}_n\}$. Let N be a balanced neighbourhood of zero such that, for each j, $\mathcal{U}_j$ is the only $\mathcal{U}_k$ contained in $\mathcal{U}_j + 3N$.

According to iii), for n great enough, say $n \geq n_o$, we have $(\dot{u}_{n+1} - \dot{u}_n) \in N$. Because of i) and ii) there is n_1 such that for $n \geq n_1$, $\dot{u}_n$ belongs to one of the sets $(\mathcal{U}_j + N)$, $j=1,\ldots,p$. Suppose that for some $n \geq n_o, n_1$ we have $\dot{u}_n \in (\mathcal{U}_{j_o} + N)$. Since $(\dot{u}_{n+1} - \dot{u}_n) \in N$, we have $\dot{u}_{n+1} \in (\mathcal{U}_{j_o} + 2N)$ but the choice of N yields $(\mathcal{U}_{j_o} + 2N) \cap (\mathcal{U}_k + N) = \emptyset$ for $k \neq j_o$, so that $\dot{u}_{n+1}$ also belongs to $(\mathcal{U}_{j_o} + N)$. Thus $\mathcal{U}_{j_o}$ is the only cluster value of $\{\dot{u}_n\}$, and by compactness it is also its limit. Consequently, the cluster values of $\{u_n\}$ all belong to the same class modulo Z. But if $z \in Z$ and if u and u+z are solutions of problem (1.5), for every $\lambda \in (0,1)$ $u+\lambda z$ is also a solution. Problem (1.5) then admits infinitely many solutions unless z=0. This proves that the sequence $\{u_n\}$ has also an only cluster value which is therefore its limit. Let us now check that $u+\lambda z$ is actually a solution. Since $z \in Z$, for $L \in \partial F(u) \cap \partial G(u)$ we have

$$F(u+\lambda z+v) \geq F(u)+L(v),$$

$$G(u+\lambda z+v) \geq G(u)+L(v).$$

Since u and (u+z) belong to K (cf. (1.6)), it is clear that $F(u) = F(u+z) = \operatorname{Inf}_{z' \in Z} F(u+z')$. The convexity of F then yields $F(u) = F(u+\lambda z)$ for $\lambda \in (0,1)$. But we also have $G(u+\lambda z) = G(u)$ for all λ so that for $\lambda \in (0,1)$ we obviously have $L \in \partial F(u+\lambda z) \cap \partial G(u+\lambda z)$, whence $(u+\lambda z)$ is a solution of (1.5).

Concerning the case when Z is finite dimensional, the argument is the same as in Remark 1.5.

2. - DISCRETIZATION OF THE ABSTRACT SUBDIFFERENTIAL PROBLEM.

2.1. The discrete problem.

In the same framework as in Sec. 1, our purpose is now to give a discretization of problem (1.7) or more generally of problem (1.5). Let us recall that solutions of (1.7) are said variational solutions of (1.5).

We suppose given an internal convergent approximation of the space V in a classical manner (cf. P.G. CIARLET [7], R. TEMAM [22]) that is to say a family $\{V_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ [1] of finite dimensional subspaces of V satisfying the convergence condition

---

([1]) The set $\mathcal{H}$ of indices is a basis of a filter that converges to 0.

(2.1) $\lim_{h\to 0} \{ \inf_{v_h \in V_h} \|v-v_h\| \} = 0$, for every $v \in V$.

We suppose moreover that the space Z (appearing in (1.3)-(1.4)) is contained in every V_h.

We denote by F_h, G_h, J_h the restrictions of the functionals F,G,J to the space V_h and we call K_h the set

(2.2) $K_h = \{v_h \in V_h : F_h(v_h) \le F_h(v_h+z) \text{ for all } z \in Z\}$,

which is nothing else than $K \cap V_h$.

We associate with problem (1.5) the following family of discrete problems : for fixed $h \in \mathcal{H}$, find $u_h \in V_h$ such that

$(2.3)_h$ $\partial F_h(u_h) \cap \partial G_h(u_h) \neq \emptyset$.

We also associate with problem (1.7) the following problems : for fixed $h \in \mathcal{H}$, find u_h such that

$(2.4)_h$ $u_h \in K_h$ and $J_h(u_h) \le J_h(v_h)$ for all $v_h \in K_h$.

Since conditions (1.1)-(1.4) and (1.8)-(1.10) are satisfied by F and G, they are clearly true for their restrictions F_h and G_h ; thus according to Theorem 1.1, every solution of Ineq. $(2.4)_h$ is also a (variational) solution of $(2.3)_h$ and there is at least one such solution.

Remark 2.1 : In the quadratic case $G(v) = \frac{1}{2} a(v,v)$, the discrete problem $(2.3)_h$ can also be written : find $u_h \in V_h$ such that

$(2.3)'_h$ $a_h(u_h,\cdot) \in \partial F_h(u_h)$.

2.2. A convergence result.

Concerning the convergence of a sequence $\{u_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ of solutions of $(2.4)_h$, we cannot expect a global convergence because of the non-uniqueness of solutions. However, we have

Theorem 2.1 : *Assume that hypotheses* (1.1)-(1.4), (1.8)-(1.10) *are satisfied and that the approximation* $\{V_h\}_{h\in H}$ *of the space* V *is convergent in the sense of* (2.1) *; then, if* $\{u_h\}_{h\in H}$ *is a family of variational solutions of* $(2.3)_h$, *there exists a subsequence* $\{u_{h'}\}_{h'}$ *which converges strongly in* V *to a variational solution of* (1.5). *Moreover, the limit* u *of any weakly convergent subsequence of solutions (resp. variational solutions)* $\{u_{h'}\}_{h'}$ *of* $(2.3)_h$ *is a solution (resp. variational solution) of* (1.5).

Proof of theorem 2.1 :

i) First step : the variational solutions u_h of $(2.3)_h$ are bounded independently of h.

The minimization of F on the space Z provides some $z_o \in K \cap Z$. Because of the inclusion $Z \subset V_h$, z_o belongs to each K_h. Any solution u_h of $(2.4)_h$ then satisfies $J(u_h) \leq J(z_o)$. This estimate and the coercivity assumption (1.10) yield there exists $C > 0$ independent of h such that $\|u_h\| \leq C$ for all h.

Given solutions u_h of $(2.4)_h$ for infinitely many values of h, there is therefore at least one weakly converging subsequence $\{u_{h'}\}$.

ii) Second step : the weak limit u of a sequence $\{u_{h'}\}$ of variational solutions of $(2.3)_h$ is a variational solution of (1.5).

At first, we have $u \in K$ since K is weakly closed and each $u_{h'}$ belongs to K. Now, we prove that $J(u) \leq J(v)$ for all $v \in V$. Given $v \in V$, the convergence condition (2.1) allows us to introduce a family $\{v_h\}_{h\in H}$ of elements of the spaces V_h such that $v_h \to v$. Then, by (1.15) we know that there is $z_h \in Z$ such that $w_h = v_h + z_h$ belongs to K_h. And since $u_{h'}$ satisfies $(2.4)_h$, we have

$$J(u_{h'}) \leq J(w_{h'}). \tag{2.5}$$

But we noticed in Sec. 1.3 that J is weakly l.s.c. on V, whence

$$J(u) \leq \liminf_{h'\to 0} J(u_{h'}) \leq \liminf_{h'\to 0} J(w_{h'}).$$

To prove that u is a solution of (1.7) as announced, it is now enough to show

$$\lim_{h\to 0} J(w_h) = J(v). \tag{2.6}$$

On the one hand, we have $G(w_h) = G(v_h)$ because of (1.3), and $\lim_{h\to 0} G(v_h) = G(v)$.

On the other hand, we have $F(w_h) \leq F(v_h)$ because $w_h \in K_h$, so that $\limsup_{h \to 0} F(w_h) \leq F(v)$. Besides that, since $v \in K$ there exists $L \in \partial F(v) \cap Z^o$ and we have

$$F(w_h) \geq F(v) + L(v_h - v) \ ,$$

which yields $\liminf_{h \to 0} F(w_h) \geq F(v)$. We finally obtain $\lim_{h \to 0} F(w_h) = F(v)$ which completes the proof of (2.6).

iii) Third step : the weak limit u of a sequence of solutions $\{u_{h'}\}$ of $(2.3)_h$ is a solution of (1.5).

Let $\{L_{h'}\}$ be a corresponding sequence of continuous linear forms on $V_{h'}$, such that $L_{h'} \in \partial F_{h'}(u_{h'}) \cap \partial G_{h'}(u_{h'})$. We introduce below extensions $\tilde{L}_{h'} \in V^*$ of the forms $L_{h'}$ and prove that they have a cluster value $L \in \partial F(u) \cap \partial G(u)$, which shows that u is a solution of (1.5).

Using Hahn Banach theorem as in the proof of lemma 1.2, we see that $L_{h'}$ can be extended into $\tilde{L}_{h'} \in V^*$ satisfying

$$\tilde{L}_{h'} \in \partial F(u_{h'}).$$

The weakly convergent sequence $\{u_{h'}\}$ being bounded, the arguments used to show i) ii) and iii) in the proof of Theorem 1.2 can be repeated to prove that a subsequence of $\{L_{h'}\}$ converges strongly in V^* to some $L \in \partial F(u)$.

On the other hand, since $\tilde{L}_{h'}|_{V_{h'}} = L_{h'} \in \partial G_{h'}(u_{h'})$ we have

$$G(v_{h'}) \geq G(u_{h'}) + \tilde{L}_{h'}(v_{h'} - u_{h'}) \text{ for all } v_{h'} \in V_{h'}.$$

Let $\{v_{h'}\}$ be a sequence converging strongly to v. Since G is weakly l.s.c. on V, we get at the limit

$$G(v) \geq G(u) + L(v-u) \text{ for all } v \in V,$$

that is to say $L \in \partial G(u)$. Hence $L \in \partial G(u) \cap \partial F(u)$.

iv) Fourth step : any weakly converging sequence $\{u_{h'}\}$ of solutions of $(2.3)_h$ converges in fact strongly to its limit u. According to Remark 1.5, we only need to prove the strong convergence in V/Z. We argue by contradiction and

assume that $\{u_{h''}\}$ is some subsequence such that $\|\dot{u}_{h''}-\dot{u}\|_{V/Z} \geq \varepsilon > 0$ for all h''. Repeating the arguments of step iii) we may also suppose that corresponding forms $L_{h''} \in \partial F_{h''}(u_{h''}) \cap \partial G_{h''}(u_{h''})$ have been extended into $\tilde{L}_{h''} \in V^*$ and that the sequence $\{\tilde{L}_{h''}\}$ converges strongly to $L \in \partial G(u) \cap \partial F(u)$. Let $\bar{u}_{h''} \in V_{h''}$ be such that $\bar{u}_{h''} \to u$ strongly (such a sequence exists thanks to (2.1)). We then have

$$G(\bar{u}_{h''}) \geq G(u_{h''})+L_{h''}(\bar{u}_{h''}-u_{h''})$$

$$\geq \text{(by (1.4))}$$

$$\geq G(u)+L(u_{h''}-u)+\tilde{L}_{h''}(\bar{u}_{h''}-u_{h''})+\alpha\|\dot{u}-\dot{u}_{h''}\|^2_{V/Z}.$$

Taking the lim sup of the two members of this inequality we get

$$0 \geq \alpha \limsup_{h'' \to 0} \|\dot{u}-\dot{u}_{h''}\|^2_{V/Z} \geq \alpha\varepsilon^2$$

in contradiction with $\varepsilon > 0$. This proves that the convergence of $\{u_{h'}\}$ to u is strong and completes the proof of Theorem 2.1. ■

2.3. The discrete iteration scheme (for fixed $h \in \mathcal{H}$).

The starting point is some $u_o \in K_h$; once $u_1 \in K_h, \ldots, u_n \in K_h$ have been obtained, we get $u_{n+1} \in K_h$ in the following way.

Step 1 : let L_n belong to the (non-empty convex) set $\partial F_h(u_n) \cap Z^o$; we define $\mathcal{U}_{n+1} \in V_h/Z$ as the solution of the minimization problem

$$\inf_{\mathcal{U} \in V_h/Z} \{G_h(\mathcal{U})-L_n(\mathcal{U})\}.$$

Step 2 : We then take for u_{n+1} a solution of the minimization problem

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{n+1}} F_h(u).$$

For fixed $h \in \mathcal{H}$, since $Z \subset V_h$, conditions (1.1)-(1.4) and (1.8)-(1.10) that are fulfilled by F and G on the space V, are also satisfied by their restrictions F_h and G_h on the space V_h. Consequently, as well as in the continuous case, a sequence $\{u_n\}$ can be obtained by this algorithm and its convergence properties are described by Theorem 1.2 and Corollary 1.1 which are still valid on V_h.

3. - A SET-VALUED ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATION.

3.1. The problem. Equivalence with an abstract subdifferential problem.

Given a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ with a smooth boundary Γ, let

$$\mathcal{A}u = - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

be a second order uniformly-strongly elliptic differential operator (with constant of ellipticity $\eta > 0$). We suppose that $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ and that $a_{ij} = a_{ji}$. Let $\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}$ be the outward conormal derivative associated with the operator $\mathcal{A}$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \cos(\nu, e_i) \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

where ν denotes the unit outward normal to Γ.

Let $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function which satisfies

(3.1)
$$\begin{cases} \text{i)} & \text{for all } s \in \mathbb{R},\ \Phi(\cdot,s) \text{ is Lebesgue-measurable,} \\ \text{ii)} & \text{for almost all } x \in \Omega,\ \Phi(x,\cdot) \text{ is convex,} \\ \text{iii)} & \Phi(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega) \text{ and for almost all } x \in \Omega, \Phi(x,s) = \Phi(x,0) \text{ for } s \le 0, \\ \text{iv)} & \lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{\| \Phi(\cdot,s) \|_\infty}{s^{\alpha+1}} = 0 \text{ where } \alpha \text{ is } \dfrac{N}{N-2} \text{ if } N > 2 \text{ and some} \\ & \text{number } > 1 \text{ if } N \le 2. \end{cases}$$

Remark 3.1 : Assumption ii) yields that for almost all $x \in \Omega$ the function $\Phi(x,\cdot)$ is continuous, whence Φ satisfies the Caratheodory condition.

Let us now define the left and right derivatives of $\Phi(x,\cdot)$

$$\underline{\phi}(x,s) = \lim_{t \to s-0} \frac{\Phi(x,t)-\Phi(x,s)}{t-s} \le \bar{\phi}(x,s) = \lim_{t \to s+0} \frac{\Phi(x,t)-\Phi(x,s)}{t-s} .$$

It is easy to check that the functions $\underline{\phi}$ and $\bar{\phi}$ are nonnegative a.e., nondecreasing with respect to s, and that we have the asymptotic condition

(3.2)
$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\| \bar{\phi}(\cdot,s) \|_\infty}{s^\alpha} = 0 \ , \text{ with } \alpha \text{ given in (3.1) iv).}$$

Moreover, if $u : \Omega \to \mathbb{R}$ is any Lebesgue-measurable function, the functions

$\underline{\phi}(\cdot,u(\cdot))$ and $\bar{\phi}(\cdot,u(\cdot))$ are also Lebesgue-measurable.

We consider the following set-valued equation : given some positive constant I, we look for solutions $u \in H^2(\Omega)$ of

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}u \in [\underline{\phi}(x,u(x)),\ \bar{\phi}(x,u(x))] \text{ a.e. in } \Omega, \\ u = \text{const. (unknown) a.e. on } \Gamma, \\ -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{L}}}\, d\sigma = I\ . \end{cases}$$

The following part of this section studies the equivalence of problem (3.3) with an abstract subdifferential problem entering the framework of Sec. 1.

Let V and H be the spaces

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = \text{const. a.e. on } \Gamma\},$$
$$H = L^2(\Omega)$$

which are Hilbert spaces when equipped respectively with the scalar products

$$((u,v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + u(\Gamma)\cdot v(\Gamma),$$
$$(u,v) = \int_\Omega uv\, dx,$$

where $v(\Gamma)$ denotes the constant value of v on Γ.

We associate with the operator $\mathcal{L}$ the nonnegative symmetric bilinear form on V

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx.$$

Its kernel Z consists of all the functions that are constant on Ω.

It is easy to check that conditions i)-ii) of the quadratic case in Sec.1.1 are fulfilled by V,H,a.

Now, let us study the two convex functionals

$$F_o(v) = \int_\Omega \Phi(x,v(x))dx,$$
$$F(v) = F_o(v) - I\cdot v(\Gamma).$$

It follows from (3.1) that for some constant $C > 0$ we have $|\Phi(x,s)| \leq C+|s|^{\alpha+1}$ for all s and almost all x. Then, if $v \in L^{\alpha+1}(\Omega)$, we have $\phi(\cdot,v(\cdot)) \in L^1(\Omega)$. Moreover, according to a theorem of KRASNOSEL'SKII (Th. I.2.1 of [11]) $v \to \phi(\cdot,v(\cdot))$ maps continuously $L^{\alpha+1}(\Omega)$ into $L^1(\Omega)$ so that the functional F_o is continuous on $L^{\alpha+1}(\Omega)$. Sobolev's theorem asserts that the embedding $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ is continuous for $1 \leq q \leq 2\alpha$ and completely continuous for $1 \leq q < 2\alpha$, especially for $q=\alpha+1$. Hence, the functional F_o is weakly continuous on V, and so is F. The subdifferential $\partial F_o(v)$ (and consequently $\partial F(v)$) can be determined thanks to arguments contained in I. EKELAND - R. TEMAM [9]. By definition, $v^* \in L^{\alpha+1/\alpha}(\Omega) = (L^{\alpha+1}(\Omega))'$ belongs to $\partial F_o(v)$ if and only if

$$F_o(v)+F_o^*(v^*) = \int_\Omega v(x)v^*(x)\,dx, \tag{3.4}$$

where the conjugate function of F_o is given by

$$F_o^*(v^*) = \sup_{v \in L^{\alpha+1}(\Omega)} \{\int_\Omega vv^*dx - F_o(v)\}.$$

By Prop. IX 2.1 of [9], $F_o^*(v^*)$ can be expressed in the form

$$F_o^*(v^*) = \int_\Omega \Phi^*(x,v^*(x))dx$$

where $\Phi^*(x,s) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{st-\Phi(x,t)\}$.

Equality (3.4) then means

$$\int_\Omega [\Phi(x,v(x))+\Phi^*(x,v^*(x))-v(x)v^*(x)]\,dx = 0,$$

but the bracket being nonnegative, this is also equivalent to

$$\Phi(x,v(x))+\Phi^*(x,v^*(x)) = v(x)v^*(x) \text{ a.e. in } \Omega. \tag{3.5}$$

By definition of subdifferentials, we see that $v^*(x)$ belongs to the subdifferential of $\Phi(x,\cdot)$ at $v(x)$ for almost all x, i.e. $v^*(x) \in [\underline{\phi}(x,v(x)),\bar{\phi}(x,v(x))]$ a.e. Conversely, any mesurable function v^* which satisfies this latter relation belongs to $L^{\alpha+1/\alpha}(\Omega)$ because of (3.2) and to $\partial F_o(v)$ because of (3.4)-(3.5). Then, by Prop. I.5.7 of [9] the subdifferential $\partial F(v)$ of F at $v \in V$ consists of

all the linear forms L such that

$$L(w) = \int_\Omega v^*(x)w(x)dx - I\cdot w(\Gamma)$$

where $v^* \in L^{\alpha+1/\alpha}(\Omega)$ satisfies $v^*(x) \in [\underline{\phi}(x,v(x)), \bar{\phi}(x,v(x))]$ a.e. in Ω.

As we check it below, problem (3.3) can be put in the following abstract subdifferential form : find $u \in V$ wuch that $a(u,\cdot) \in \partial F(u)$, that is to say

$$(3.6) \qquad \begin{cases} \text{find } u \in V \text{ such that} \\ a(u,v) = \int_\Omega \rho(x)v(x)dx - I\cdot v(\Gamma) \text{ for all } v \in V \\ \text{with } \underline{\phi}(x,u(x)) \le \rho(x) \le \bar{\phi}(x,u(x)) \text{ a.e. in } \Omega. \end{cases}$$

If $u \in H^2(\Omega)$ satisfies (3.3), then $u \in L^{\alpha+1}(\Omega)$ and $\rho = \mathcal{L}u \in L^{\alpha+1/\alpha}(\Omega)$ since $\underline{\phi}(x,u(x)) \le \rho(x) \le \bar{\phi}(x,u(x))$ a.e. in Ω. If we multiply the equality $\rho = \mathcal{L}u$ by $v \in V$ and integrate over Ω, we get by Green's formula

$$a(u,v) = \int_\Omega \rho(x)v(x)dx + v(\Gamma) \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{L}}} d\sigma ,$$

so that (3.6) is satisfied since $I = -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{L}}} d\sigma$.

Conversely, if $u \in V$ satisfies (3.6) we have $\mathcal{L}u = \rho$ in the sense of distributions, and u is constant on Γ. By Sobolev's embedding $H^1(\Omega) \subset L^{2\alpha}(\Omega)$, we have $u \in L^{2\alpha}(\Omega)$ so that $\rho \in L^2(\Omega)$. Then, classical regularity results yield $u \in H^2(\Omega)$, since the boundary Γ and the coefficients $a_{ij}(x)$ are smooth enough. Green's formula is therefore valid and leads to $-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{L}}} d\sigma = I$, whence u satisfies (3.3).

We now conclude this section with an explicit characterization of the set K, defined as in Sec. 1.1 by

$$K = \{v \in V : F(v) \le F(v+z) \text{ for all } z \in \mathbb{R}\} ,$$

which contains every solution of (3.3).

According to lemma 1.2, $v \in K$ if (and only if) $\partial F(v) \cap Z^o \neq \emptyset$, that is to say if $I = \int_\Omega v^*(x)dx$ for some function v^* such that $\underline{\phi}(x,v(x)) \le v^*(x) \le \bar{\phi}(x,v(x))$ a.e. in Ω. Considering for example the function $\theta\underline{\phi} + (1-\theta)\bar{\phi}$ for an appropriate

$\theta \in (0,1)$ it is easy to see that

$$(3.7) \qquad K = \{v \in V : \int_\Omega \underline{\phi}(x,v(x))dx \le I \le \int_\Omega \bar{\phi}(x,v(x))dx\} .$$

3.2. An iteration scheme.

We note that $H_o^1(\Omega)$ is a topological complement of Z in V ; it is therefore isomorphic to V/Z. For this reason the iteration scheme described in Sec. 1.4 becomes : the starting point is some $u_o \in K$; once $u_1,\dots,u_n \in K$ have been obtained, we get $u_{n+1} \in K$ as follows

Step 1 : Let $\rho_n \in L^2(\Omega)$ be defined by

$$\rho_n(x) = \theta\underline{\phi}(x,u_n(x)) + (1-\theta)\ \bar{\phi}(x,u_n(x)),$$

with $\theta \in (0,1)$ chosen such that $\int_\Omega \rho_n(x)dx = I$; we then determine $\tilde{u}_{n+1}$ as the unique solution in $H_o^1(\Omega)$ of

$$\mathcal{L}\tilde{u}_{n+1} = \rho_n \text{ a.e. in } \Omega.$$

Step 2 : We set $u_{n+1} = \tilde{u}_{n+1} + z_{n+1}$ where $z_{n+1} \in \mathbb{R}$ is a solution of

$$F(\tilde{u}_{n+1}+z_{n+1}) \le F(\tilde{u}_{n+1}+z) \text{ for all } z \in \mathbb{R}.$$

Remark 3.2 :

i) wherever $\underline{\phi}(x,u_n(x)) = \bar{\phi}(x,u_n(x))$ we have $\rho_n(x) = \bar{\phi}(x,u_n(x))$.

ii) we could also take for ρ_n any function such that

$$\int_\Omega \rho_n(x)dx = I \text{ and } \underline{\phi}(x,u_n(x)) \le \rho_n(x) \le \bar{\phi}(x,u_n(x)) \text{ a.e. in } \Omega.$$

iii) we can equivalently obtain z_{n+1} by solving

$$\int_\Omega \underline{\phi}(x,\tilde{u}_{n+1}(x)+z_{n+1})dx \le I \le \int_\Omega \bar{\phi}(x,\tilde{u}_{n+1}(x)+z_{n+1})dx.$$

iv) If $\tilde{V}_h$ is some finite dimensional subspace of $H_o^1(\Omega)$ (for example a finite element approximation of $H_o^1(\Omega)$) and $V_h = \tilde{V}_h \oplus \mathbb{R}$, the discrete iteration scheme of Sec. 2.3 consists in computing $\rho_n \in L^2(\Omega)$ as above, then $\tilde{u}_{n+1} \in \tilde{V}_h$ in solving

$$a(\tilde{u}_{n+1},\tilde{v}_h) = (\rho_n,\tilde{v}_h) \text{ for all } \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h,$$

and finally in setting $u_{n+1} = \tilde{u}_{n+1}+z_{n+1}$ with z_{n+1} determined as above.

3.3. Existence of solutions and convergence of the iteration scheme.

Theorem 3.1 : *The domain Ω and the operator $\mathcal{L}$ being those defined in Sec. 3.1, we assume that the function Φ satisfies condition (3.1) and that the constant I satisfies $0 < I < I_\infty$ (with $I_\infty = \int_\Omega \lim_{s\to+\infty} \underline{\phi}(x,s)dx$). Then*

i) Eq. (3.3) admits at least one solution $u \in H^2(\Omega)$;

ii) for every $u_o \in K$, the sequence $\{u_n\}$ obtained with the iteration scheme described in Sec. 3.2 admits a subsequence which converges in $H^1(\Omega)$ to a solution of (3.3), and the limit of any other converging subsequence is also a solution of (3.3) ;

iii) furthermore, if the solutions of Eq. (3.3) form a finite set, the whole sequence $\{u_n\}$ converges to one of them.

Proof : We have to check conditions (1.8),(1.9),(1.10) of Sec. 1.1.

i) Verification of (1.8)

Let us recall that in this section, the space Z consists of all real constants. We study separetely $z \to +\infty$ and $z \to -\infty$.

If $z \to -\infty$, we have $\phi(x,u(x)+z) \to \Phi(x,0)$ a.e. in Ω so that by Lebesgue's theorem of dominated convergence

$$\int_\Omega \Phi(x,u(x)+z)dx \to \int_\Omega \Phi(x,0)dx$$

whence $F(u+z) \to +\infty$ for $z \to -\infty$.

By assumption, there is $\beta > 0$ such that $\int_\Omega \lim_{s\to+\infty} \underline{\phi}(x,s)dx > I+2\beta$, and we obtain by the theorem of monotonous convergence that there exists $C > 0$ such that

$$\int_\Omega \underline{\phi}(x,u(x)+c)dx \geq I+\beta \quad . \tag{3.8}$$

For almost all x, it is easy to see that

$$\phi(x,s) \geq (s-s_o)\underline{\phi}(x,s_o) \text{ for all } s,s_o.$$

Then, if we set $s = u(x)+z$, $s_o = u(x)+C$ and integrate over Ω, we get

$$F(u+z)+(u(\Gamma)+z)I \geq (z-C)\int_\Omega \underline{\phi}(x,u(x)+C)dx.$$

According to (3.8) we have for some constant C'

$$F(u+z) \geq \beta z + C',$$

whence $F(u+z) \to +\infty$ for $z \to +\infty$.

ii) Verification of (1.9).

A broad use of techniques contained in the proofs of lemma 1.1 [21] of R. TEMAM and lemmas 3.2, 3.3 [3] of H. BERESTYCKI - H. BREZIS - in which $\Phi(x,\cdot)$ is a function of class C^1 - leads to

Lemma 3.2 : *Under the hypotheses of Th.* 3.1, *there exists constants* $\eta' > 0$ *and* $C' > 0$ *such that*

$$(3.9) \qquad \frac{1}{2}\,a(u,u)-F(u) \geq \eta' |\nabla u|^2_{L^2} - C' \text{ for all } u \in K.$$

Proof : The first step is to see that for every $\varepsilon > 0$ there are positive constants $C_{i,\varepsilon}$ $(i=1,3)$ such that for all $v \in V$

$$(3.10) \qquad 0 \leq \underline{\phi}(x,s) \leq \bar{\phi}(x,s) \leq C_{1,\varepsilon} + \varepsilon (s_+)^\alpha \text{ for all } s \text{ and almost all } x^{(1)}$$

$$(3.11) \qquad |\underline{\phi}(\cdot,v(\cdot))|_{L^2} \leq \{C_{2,\varepsilon} + \varepsilon |v_+|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}}\}^{1/2}$$

$$(3.12) \qquad |\Phi(\cdot,v(\cdot))|_{L^1} \leq \{C_{3,\varepsilon}+\varepsilon |v_+|^2_{L^{2\alpha}}\} \cdot |\underline{\phi}(\cdot,v(\cdot))|^{1-\frac{1}{\alpha}}_{L^1} + |\Phi(\cdot,0)|_{L^1}$$

Relation (3.10) is an easy consequence of (3.2).

We then set $s=v(x)$ and integrate the square of $\underline{\phi}(x,v(x))$ on Ω ; in this way, we get (3.11) since the domain Ω is bounded.

It follows from the relation $\Phi(x,s) = \int_o^s \underline{\phi}(x,t)dt + \Phi(x,0)$ that

$$|\Phi(x,s)| \leq s_+ \cdot \underline{\phi}(x,s) + |\Phi(x,0)|$$

---

(1) Hereinafter s_+ denotes $\max(s,0)$ for numbers and functions as well.

whence by Hölder inequality

$$(3.13) \qquad |\Phi(\cdot,v(\cdot))|_{L^1} \le |v_+|_{L^{2\alpha}} \cdot |\underline{\phi}(\cdot,v(\cdot))|_{L^q} + |\Phi(\cdot,0)|_{L^1}$$

where q is the conjugate of 2α (given by $\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{q} = 1$). We have $1 < q < 2$ and $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{1}$ with $\theta = \frac{1}{\alpha}$ so that by Hölder inequality again

$$(3.14) \qquad |\underline{\phi}(\cdot,v(\cdot))|_{L^q} \le |\underline{\phi}(\cdot,v(\cdot))|^{1/\alpha}_{L^2} |\underline{\phi}(\cdot,v(\cdot))|^{1-1/\alpha}_{L^1}.$$

Then, we use (3.11),(3.13) and (3.14) to obtain (3.12).

From now on, we only consider the case $u \in K$. It follows from (3.12) that

$$(3.15) \qquad |\Phi(\cdot,u(\cdot))|_{L^1} \le I^{1-1/\alpha}\{C_{3,\varepsilon} + \varepsilon |u_+|^2_{L^{2\alpha}}\} + |\Phi(\cdot,0)|_{L^1}.$$

Now, we consider separately the cases $u(\Gamma) \le 0$ and $u(\Gamma) > 0$.

Case $u(\Gamma) \le 0$.

First, we have $u_+ \in H^1_o(\Omega)$ and Sobolev embedding's theorem yields

$$(3.16) \qquad |\Phi(\cdot,u(\cdot))| \le C_{4,\varepsilon} + \varepsilon |\nabla u|^2_{L^2},$$

for some constant $C_{4,\varepsilon}$ depending on $\varepsilon > 0$.

From (3.10) it follows that for some $C_{5,\varepsilon}$

$$\gamma^{\alpha} \bar{\phi}(x,s) \le C_{5,\varepsilon} + \varepsilon(\gamma + s_+)^{2\alpha} \text{ for all } \gamma > 0.$$

Taking $s=u(x)$ and $\gamma = -u(\Gamma)$, we obtain by integration over $\Omega_+ = \{u \ge 0\}$

$$|u(\Gamma)| \cdot |\bar{\phi}(\cdot,u(\cdot))|^{1/\alpha}_{L^1} \le C_{6,\varepsilon} + \varepsilon |u-u(\Gamma)|^2_{L^{2\alpha}}.$$

The left-hand side member of this inequality is greater than $|u(\Gamma)| \cdot I^{1/\alpha}$ since $u \in K$, and applying again Sobolev's theorem to $u-u(\Gamma) \in H^1_o(\Omega)$ we get

$$(3.17) \qquad |u(\Gamma)| \le C_{7,\varepsilon} + \varepsilon |\nabla u|^2_{L^2}.$$

From (3.16),(3.17) and the coercivity of $a(\cdot,\cdot)$ on $H^1_o(\Omega)$, choosing ε small enough, we get (3.9) in the case $u(\Gamma) \le 0$.

Case $u(\Gamma) \geq 0$.

We have $u-u(\Gamma) \in H_o^1(\Omega)$ and by definition of K

$$F(u) \leq F(u-u(\Gamma)).$$

Since $u \in K$ and ϕ is nondecreasing, we have

$$\int_\Omega \phi(x,u(x)-u(\Gamma))dx \leq \int_\Omega \phi(x,u(x))dx \leq I.$$

Then, applying (3.12) to $u-u(\Gamma)$ we get

$$|\phi(\cdot,u-u(\Gamma))|_{L^1} \leq C_{8,\varepsilon} + \varepsilon|\nabla u|^2_{L^2}$$

thanks to Sobolev's theorem.

Finally, we have

$$-F(u) \geq -F(u-u(\Gamma)) \geq -\varepsilon|\nabla u|^2_{L^2} - C_{8,\varepsilon}$$

whence (3.9) follows.

iii) Verification of (1.10).

We argue by contradiction and assume that a sequence $\{u_n\}$ satisfies

$$u_n \in K, \ \|u_n\| \to +\infty \text{ and } \frac{1}{2}\, a(u_n,u_n)-F(u_n) \leq C$$

for some constant C.

It follows from (3.9) and (3.17) respectively that

$$|\nabla u_n|_{L^2} \leq C \ , \ -C \leq u_n(\Gamma)$$

for another constant C. Hence, the sequence $u_n-u_n(\Gamma)$ which is bounded in $H_o^1(\Omega)$ admits a converging subsequence in $L^2(\Omega)$ and we may even suppose that

$$u_{n'}-u_{n'}(\Gamma) \to w \text{ a.e. in } \Omega.$$

Since on the other hand we must have $u_n(\Gamma) \to +\infty$,

$$u_{n'} \to +\infty \quad \text{a.e. in } \Omega$$

and Fatou's lemma yields

$$\int_\Omega \lim_{s \to +\infty} \underline{\phi}(x,s)\,dx \le \liminf_{n' \to +\infty} \int_\Omega \underline{\phi}(x,u_{n'}(x))\,dx$$

in contradiction with the assumption $I < I_\infty$.

This completes the proof of Theorem 3.1. ■

4. - APPLICATION I : FREE BOUNDARY EQUILIBRIA FOR AXIALLY SYMMETRIC PLASMAS.

4.1. Stokes-Grad-Shafranov equation :

The last two sections of this paper are devoted to physical applications ; the main one is the determination of free boundary equilibria for axially symmetric plasmas, the formulation of which we briefly recall now.

We use a cylindrical coordinate system (x_1,θ,x_2) whose axis Ox_2 coincides with the center line of the toroid. In the meridional plane (Ox_1,Ox_2) we denote by Ω (with $x_1 \ge \alpha > 0$ for every $(x_1,x_2) \in \Omega$) the domain bounded by the shell Γ, by Ω_p the plasma, by Γ_p the interface plasma-vacuum and by Ω_v the vacuum.

According to the Magnetohydrodynamic theory (see G. BATEMAN [1]), the physical quantities B (magnetic field) and p (pressure) of every axisymmetric equilibrium can be expressed in terms of the poloidal flux function $u(x_1,x_2)$ by

$$B = \frac{\nabla u}{x_1} \times e_\theta + \frac{f(u)}{x_1} e_\theta ,$$

$$p = p(u),$$

the functions p,f,u being related in the plasma by Stokes-Grad-Shafranov equation

$$\mathcal{L}u = x_1 p'(u) + \frac{1}{x_1} f(u) f'(u),$$

where $\mathcal{L}$ denotes the operator $-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, whilst in the vacuum $p=0$, f = const. and the function u satisfies $\mathcal{L}u = 0$.

Following a method of R. TEMAM (cf. [20],[21]), we look for axisymmetric equilibria by specifying the whole domain Ω, the functions $p = p(u)$, $f = f(u)$ and the total current crossing the plasma $I = \int_\Omega j_\theta \, dx_1 dx_2$ [1]. When the functions

---

([1]) $j_\theta = \mathcal{L}u$ is the toroidal component of the current.

p and f are smooth (with $p(0) = 0$), the unknown poloidal flux has to satisfy

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}u = \Phi'_s(\cdot,u(\cdot)) \text{ in } \Omega, \\ u = \text{const. (unknown) on } \Gamma, \\ -\int_\Gamma \frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = I, \end{cases}$$

where we have set for $x = (x_1,x_2)$

$$(4.2)\qquad \Phi(x,s) = \begin{cases} x_1\, p(s) + \frac{1}{2x_1} f^2(s) & \text{if } s > 0, \\ \frac{1}{2x_1} f^2(0) & \text{if } s \le 0, \end{cases}$$

and ν denotes the unit outward normal to Γ. The region Ω_p occupied by the plasma, not known beforehand, is given by

$$\Omega_p = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}\ .$$

But in many cases of physical interest, the functions p and f are not regular, so that, in the case where $s \to \Phi(x,s)$ is convex[1], it seems natural to consider the generalized problem

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}u \in [\underline{\phi}(\cdot,u(\cdot)),\bar{\phi}(\cdot,u(\cdot))] \text{ a.e. in } \Omega, \\ u = \text{const. (unknown) a.e. on } \Gamma, \\ -\int_\Gamma \frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = I, \end{cases}$$

where $\underline{\phi}(x,\cdot)$ and $\bar{\phi}(x,\cdot)$ are the left and right derivatives of $\Phi(x,\cdot)$.

Moreover, we shall see that the solutions of (4.3) are in some sense solutions of (4.1). More precisely, the convexity of $\Phi(x,\cdot)$ yields that Φ'_s is well defined on $\Omega \times (\mathbb{R}-D)$ (where D denotes an at most countable set $D \subset \mathbb{R}_+$), and choosing the following extension for Φ'_s on $\Omega \times \mathbb{R}$

$$(4.4)\qquad \text{for all } x \in \Omega,\ \phi(x,s) = \begin{cases} \Phi'_s(x,s) \text{ for } s \notin D, \\ 0 \text{ for } s=0 \text{ if } 0 \in D, \\ \text{any value}^{(2)} \text{ for } s \neq 0 \text{ such that } s \in D, \end{cases}$$

---

(1) which is essentially a mathematical assumption.

(2) Let us stress that this value does not depend on x. This ensures that $\phi(\cdot,u(\cdot))$ is measurable for all measurable functions u.

we shall see that every solution u of (4.3) is also solution of

$$(4.5)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}u = \phi(\cdot,u(\cdot)) \text{ a.e. in } \Omega, \\ u = \text{const. (unknown) a.e. on } \Gamma, \\ -\int_\Gamma \frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = I. \end{cases}$$

Remark 4.1 : If we look for cylindrical plasma equilibria instead of axisymmetric equilibria, the magnetic field B and the pressure p can be expressed in terms of a flux function $u(x_1,x_2)$ by

$$B = \nabla u \times e_3 + f(u)e_3,$$
$$p = p(u),$$

and the problem (4.1) becomes

$$(4.6)\qquad \begin{cases} -\Delta u = \Phi'(u) \text{ in } \Omega, \\ u = \text{const. (unknown) on } \Gamma, \\ -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = I\ , \end{cases}$$

where we have set

$$(4.7)\qquad \Phi(s) = \begin{cases} p(s) + \frac{1}{2} f^2(s) & \text{if } s > 0, \\ \frac{1}{2} f^2(0) & \text{if } s \le 0. \end{cases}$$

It is immediate to rewrite the generalized problem (4.3) and the single-valued problem (4.5) in that case.

4.2. Existence and computation of solutions.

Assume that Ω is a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, with a smooth boundary Γ, such that

$$0 < \alpha \le x_1 \le \beta < +\infty \text{ for all } (x_1,x_2) \in \Omega,$$

and that $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ are two functions satisfying

$$(4.8)\qquad \begin{cases} \text{i)} \quad p + \dfrac{1}{2\alpha^2} f^2 \text{ and } p + \dfrac{1}{2\beta^2} f^2 \text{ are convex functions,} \\ \text{ii)} \quad p(0) = 0 \text{ and } 2\alpha^2 p(s) + f^2(s) > f^2(0) \text{ for all } s > 0, \\ \text{iii)} \quad \lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{p(s) + \dfrac{1}{2\alpha^2} f^2(s)}{s^\gamma} = 0 \text{ for some } \gamma > 2. \end{cases}$$

Corollary 4.1 : *Under these hypotheses, and the assumption that the constant* I *satisfies* $0 < I < I_\infty$ (with $I_\infty = \int_\Omega \lim\limits_{s \to +\infty} (x_1 p'(s) + \dfrac{1}{x_1} f(s) f'(s))\, dx$[1]), *then*

i) Eq. (4.5), *with* ϕ *defined by* (4.4), *admits at least one solution* $u \in H^2(\Omega)$;

ii) for every $u_o \in K$ *(defined by* (3.7)), *the sequence* $\{u_n\}$ *obtained with the iteration scheme described in Sec.* 3.2 *admits a subsequence which converges in* $H^1(\Omega)$ *to a solution of* (4.5), *and the limit of any other converging subsequence is also a solution of* (4.5) ;

iii) furthermore, if the solutions of Eq. (4.5) *form a finite set, the whole sequence* $\{u_n\}$ *converges to one of them.*

Proof : This result is due to theorem 3.1 and the equivalence between the set-valued equation (4.3) and the single-valued equation (4.5). In order to apply theorem 3.1 we only need to check condition (3.1) ii), since the others are obviously satisfied.

i) Verification of assumption (3.1) ii). Given $x \in \Omega$, there is $\theta \in [0,1]$ such that $\dfrac{1}{x_1^2} = \dfrac{\theta}{\alpha^2} + \dfrac{1-\theta}{\beta^2}$, whence by $(4.8)_{i)}$

$$(4.9)\qquad \Phi(x,s) = x_1 [\theta (p(s) + \frac{1}{2\alpha^2} f(s)^2) + (1-\theta)(p(s) + \frac{1}{2\beta^2} f(s)^2)]$$

is convex with respect to s.

ii) Equivalence between Eq. (4.3) and Eq. (4.5). The two convex functions $p + \dfrac{1}{2\alpha^2} f^2$ and $p + \dfrac{1}{2\beta^2} f^2$ are continuous on $\mathbb{R}_+$ and differentiable except perhaps on an atmost countable set $D \subset \mathbb{R}_+$.

Then it follows from (4.9) that $\Phi(x,\cdot)$ is also differentiable on $\mathbb{R}_+ - D$ for all $x \in \Omega$ so that we may introduce the function ϕ by (4.4).

([1]) As we shall see in Remark 4.2, p and f are differentiable on $R_+ - D$.

Now, let $u \in H^2(\Omega)$ be a solution of Eq. (4.3). We associate with u a partition of Ω in measurable sets

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) \notin D\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : u(x) = 0\} \text{ when } 0 \in D \text{ and } \emptyset \text{ otherwise},$$

$$\Omega_3 = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0 \text{ and } u(x) \in D\}.$$

If $x \in \Omega_1$, $\Phi(x,\cdot)$ is differentiable at $s = u(x)$, whence $\underline{\phi}(x,u(x)) = \bar{\phi}(x,u(x)) = \Phi'_s(x,u(x))$ and it turns out that

$$\mathcal{L}u(x) = \phi(x,u(x)) \text{ a.e. in } \Omega_1.$$

Now, given some $s \in \mathbb{R}$ we introduce the measurable set $E_s = \{x \in \Omega : u(x) = s\}$. Since $u \in H^2(\Omega)$, a well-known result of G. STAMPACCHIA [19] shows that $\mathcal{L}u = 0$ a.e. in E_s. We have therefore $\underline{\phi}(x,s) \leq 0$ a.e. in E_s. But, for $s > 0$, it follows from (4.8) ii) that $\underline{\phi}(x,s) > 0$ a.e. in Ω, whence E_s is a set of measure 0, and so is Ω_3. On $\Omega_2 \equiv E_o$ we have $\mathcal{L}u = 0 = \phi(\cdot,0)$ a.e. . This shows that u is a solution of (4.5). Conversely, if $u \in H^2(\Omega)$ is a solution of (4.5), we introduce the same partition of Ω as above and observe again that Ω_3 is a set of measure 0. Thus, u satisfies (4.3). ■

Remark 4.2 : Under the assumption (4.8)i), it can be shown that the functions p and f are continuous on $\mathbb{R}_+$ and differentiable except perhaps on an atmost countable set D' which contains D. Hence, if we substitute D' to D in (4.4), we may differentiate $\Phi(x,\cdot)$ term by term.

Remark 4.3 : In the cylindrical case, assumptions (4.8)i)-iii) become

i) $p + \frac{1}{2} f^2$ is a convex function, ii) $p=0$ and $p(s) + \frac{1}{2} f^2(s) > \frac{1}{2} f^2(0)$ for $s > 0$,

iii) $\lim_{s \to +\infty} \dfrac{p(s) + \frac{1}{2} f^2(s)}{s^\gamma} = 0$ for some $\gamma > 2$,

whereas I_∞ is now given by $I_\infty = |\Omega| \cdot \lim_{s \to +\infty} (p'(s) + f(s)f'(s))$, with $|\Omega|$ denoting the measure of the domain Ω.

4.3. Numerical results.

The example studied numerically corresponds to the following problem (cylindrical case)

$$(4.10)\qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda H(u) \text{ a.e. in } \Omega, \\ u = \text{const. (unknown) on } \Gamma, \\ -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = I, \end{cases}$$

where H denotes the Heaviside function ($H(z) = 0$ for $z \le 0$, $H(z) = 1$ for $z > 0$), and λ, I are two prescribed constants such that $0 < I < \lambda|\Omega|$ [1]. This problem is discretized by piecewise linear finite elements.

Fig. 1 shows the domain Ω and the triangulation used for the computations, and Fig. 2 shows the computed interface vacuum-plasma and flux-surfaces for a prescribed value of λ.

Remark 4.4 : The domain Ω is symmetrical with respect to the line $x_2 = 0$ but the solution is asymmetrical. As mentioned in [18] it is possible to obtain a symmetrical equilibrium by solving (with the same iteration scheme) problem (4.10) on the half domain with a Neumann condition on the boundary $x_2 = 0$.

5. - APPLICATION II : SHAPE OF A HEAVY ROTATING STRING.

An inelastic string of uniform cross-section, suspended with one end-point fixed, lies in a vertical plane rotating with angular velocity ω. The only forces are gravity forces and tension. Without loss of generality, we may suppose the length of the string to be 1. I.I. KOLODNER [10] showed that the horizontal displacement as a function of the arclength [2] is given by $\lambda^{-1}u'(s)$ where λ is the constant $\omega^2 g^{-1}$ (g denotes the acceleration of gravity) and $u \in H^1(0,1)$ is a solution of

$$(5.1)\qquad \begin{cases} -u''(s) = \lambda \dfrac{u(s)}{\sqrt{s^2+u^2(s)}}, \quad s \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases}$$

---

(1) In (4.10) $-\Delta u = \lambda H(u)$ a.e. is equivalent to $-\Delta u \in \lambda\beta(u)$ where β is the set-valued mapping $\beta(s) = \{0\}$ for $s < 0$, $\beta(0) = [0,1]$ and $\beta(s) = \{1\}$ for $s > 0$.

(2) The fixed end-point of the string corresponds to $s=1$.

We observe that $u \equiv 0$ is always a solution (vertical string) and that if u is a solution, so is $-u$. I.I. KOLODNER gives the exact number of non-trivial solutions. If $\mu_n < \lambda \leq \mu_{n+1}$, where $\{\mu_n\}$ denotes the sequence of eigenvalues of

$$(5.2) \qquad \begin{cases} -\phi''(s) = \mu \dfrac{\phi(s)}{s}, \\ \phi(0) = 0, \ \phi'(1) = 0, \end{cases}$$

then Eq. (5.1) has exactly n couples $(u,-u)$ of non-trivial solutions.

This problem was one of the motivations of the already quoted paper [24] by J.F. TOLAND. It we set, following J.F. TOLAND,

$$G(u) = \int_0^1 u'(s)^2 \, ds,$$

$$F(u) = \int_0^1 \sqrt{s^2+u(s)^2} ds \ ;$$

the solutions of (5.1) are the critical points of $J = G-F$ on the space $V = \{v \in H^1(0,1), \ v(0) = 0\}$.

One checks immediately that conditions (1.1)-(1.4) and (1.8)-(1.10) of Sec. 1 are satisfied, with $Z = \{0\}$.

Iteration scheme.

The starting point is some $u_o \in V$; once $u_1, \ldots, u_n$ have been obtained, we set $u_{n+1} \in V$ as the unique solution of

$$(5.3) \qquad \begin{cases} -u''_{n+1}(s) = \lambda \dfrac{u_n(s)}{\sqrt{s^2+u_n(s)^2}}, \ s \in (0,1), \\ u_{n+1}(0) = 0, \ u'_{n+1}(1) = 0. \end{cases}$$

Since the set of solutions of (5.1) is finite, we may apply Corollary 1.1 and we obtain

Theorem 5.1 : *For every fixed* $\lambda > 0$, *for every* $u_o \in V$, *the sequence* $\{u_n\}$ *obtained through the iteration scheme* (5.3) *converges strongly in* $H^1(0,1)$ *to some solution* u *of* (5.1).

Numerical results.

The problem is discretized by piecewise linear finite elements (40 elements) Fig. 3 shows the shape of the string for various values of λ.

Remark 5.1 :

i) For $0 < \lambda \leq \mu_1$ ($\mu_1 \simeq 1.446$), $u \equiv 0$ is the only solution of (5.1). For $\lambda > \mu_1$, we obtain a non-trivial solution using a non-trivial initialization.

ii) For any fixed $\lambda > \mu_1$, iteration scheme (5.3) provides very rapidly a solution of Eq. (5.3) which has the expected shape of a stable equilibrium (i.e. the string does not meet a second time the vertical axis of origin the fixed end-point). Other solutions (crossing the vertical axis) could be obtained by a continuation method.

After with work was completed, a study of topics very close to Sec. 3 by C.A. STUART appeared as a report of Ecole Polytechnique de Lausanne.

This author proves that iteration scheme of Sec. 3.2 converges when our function Φ is continuously differentiable.

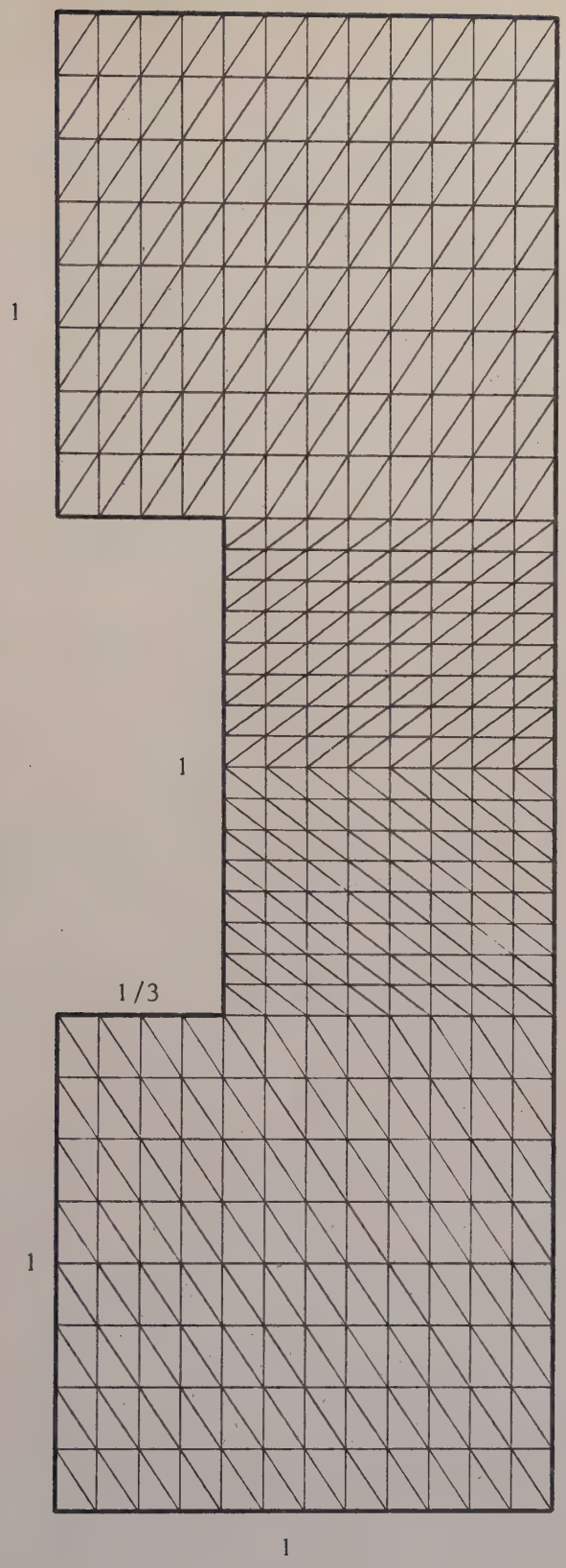


Fig. 1 - Triangulation : 640 triangles and 369 vertices.

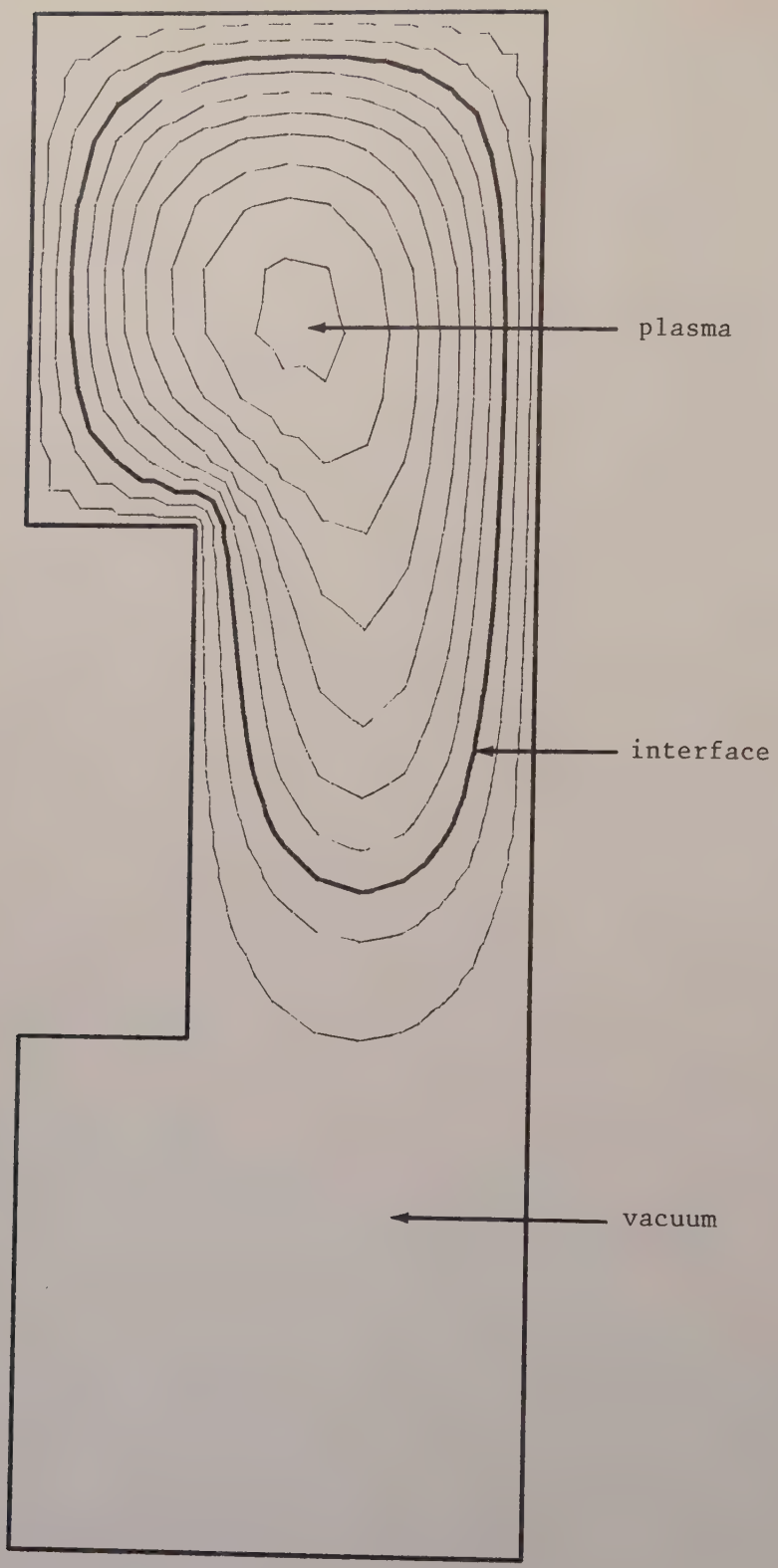


Fig. 2 - One of the solutions for $\lambda = I = 1$ ($|\Omega| = 2.666$)

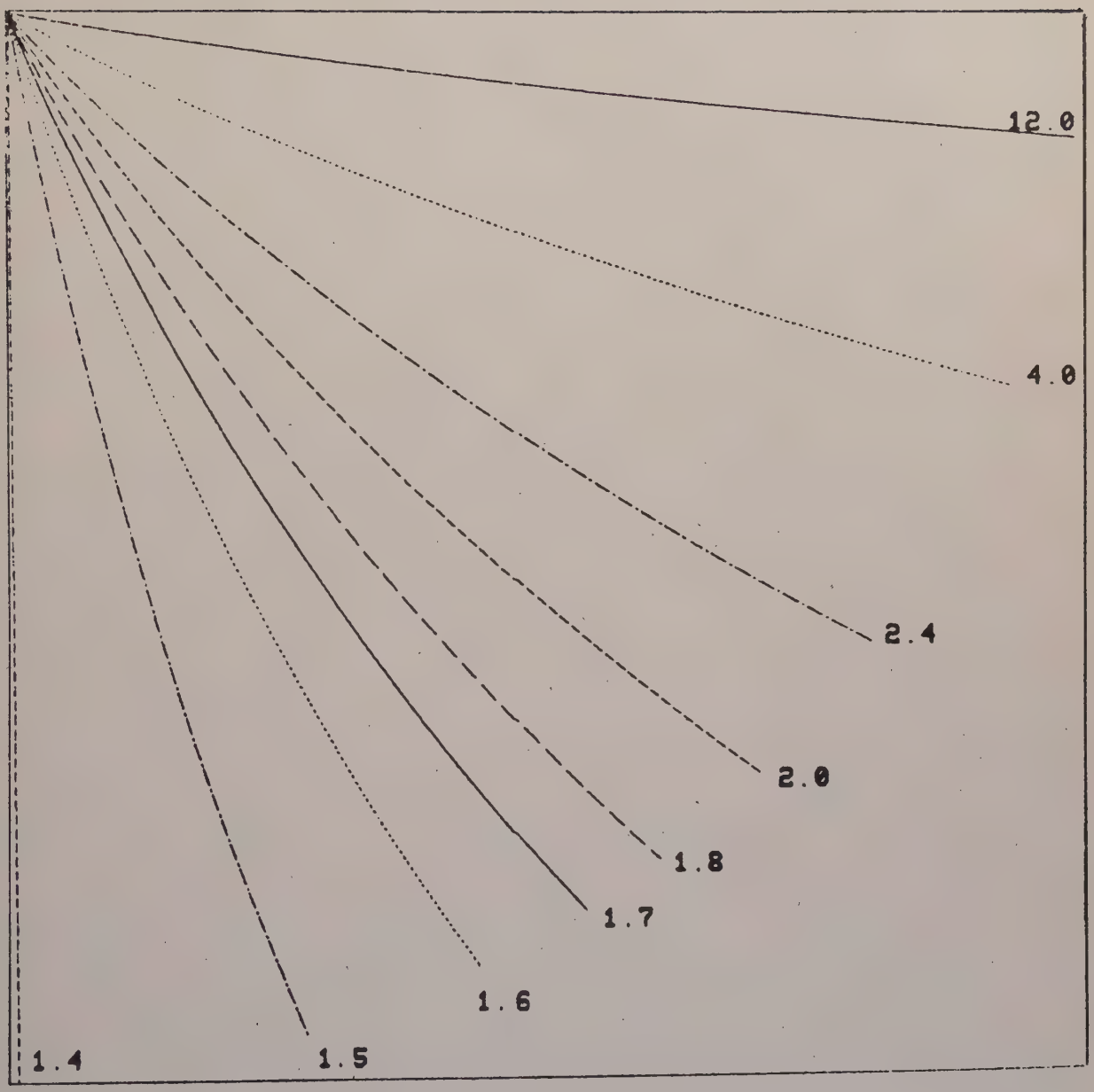


Fig. 3 - Shape of the string for various values of λ

REFERENCES

[1] G. BATEMAN, *MHD Instabilities*, The MIT Press, Cambridge (Massachussetts) 1978.

[2] H. BERESTYCKI - H. BREZIS, *Sur certains problèmes de frontière libre*, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 283 série A, 1091-1094 (1976).

[3] H. BERESTYCKI - H. BREZIS, *On a free boundary problem arising in plasma physics*, Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., 4, 415-436 (1980).

[4] K.C. CHANG, *On the multiple solutions of the elliptic differential equations with discontinuous nonlinear terms*, Scientia Sinica, XXI, 139-158 (1978).

[5] K.C. CHANG, *Free boundary problems and the set-valued mappings* (to appear).

[6] K.C. CHANG, *Variational methods for non-differentiable functionals and its application to partial differential equations* (to appear).

[7] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[8] R. CIPOLATTI, Thèse 3ème cycle, Université de Paris XI, to appear.

[9] I. EKELAND - R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris 1974 . (English translation : *Convex analysis and variational problems*, North-Holland, Amsterdam 1976).

[10] I.I. KOLODNER, *Heavy rotating string. A nonlinear eigenvalue problem*, Comm. Pure Appl. Math. VIII, 395-408 (1955).

[11] M.A. KRASNOSEL'SKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford 1964 (translation from a Russian publication).

[12] I. MASSABO, *Positive eigenvalues for elliptic equations with discontinuous nonlinearities*, Boll. U.M.I. 15-B, 814-827 (1978).

[13] I. MASSABO - C.A. STUART, *Elliptic eigenvalue problems with discontinuous nonlinearities*, J. Math. Anal. and Appl. 66, 261-281 (1978).

[14] J.P. PUEL, *Sur un problème de valeur propre non linéaire et de frontière libre*, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 284 série A, 861-863 (1977).

[15] M. SCHECHTER, *Principles of functional analysis*, Acad. Press, 1973.

[16] L. SCHWARTZ, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, 1970.

[17] M. SERMANGE, *Une méthode numérique en bifurcation - application à un problème à frontière libre de la physique des plasmas*, Appl. Math. Optim. 5, 127-151 (1979).

[18] M. SERMANGE, *Etude numérique des bifurcations et de la stabilité des solutions des équations de Grad-Shafranov*, Computing methods in applied sciences and engineering, R. GLOWINSKI, J.L. LIONS (ed.), North-Holland, Amsterdam 1980.

[19] G. STAMPACCHIA, Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Presses de l'Université de Montréal, 1966.

[20] R. TEMAM, *A non linear eigenvalue problem : the shape of equilibrium of a confined plasma*, Arch. for Rat. Mech. and Anal. 60, 51-73 (1975).

[21] R. TEMAM, *Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics*, Comm. in P.D.E. 2, 563-585 (1977).

[22] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[23] J.F. TOLAND, *Duality in nonconvex optimization*, J. of Math. Anal. and Appl. 66, 399-415 (1978).

[24] J.F. TOLAND, *A duality principle for nonconvex optimization and the calculus of variations*, Arch. for Rat. Mech. and Anal. 71, 41-61 (1979).

DEUXIEME PARTIE

EQUATIONS DE STABILITE

CHAPITRE V

MODELISATION DE LA STABILITE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE BIDIMENSIONNELLE PAR UN PROBLEME AUX LIMITES GENERALISE

Michel SERMANGE

RESUME

Partant du principe de l'énergie, nous montrons que la stabilité MHD bidimensionnelle d'un équilibre bidimensionnel quelconque est déterminée par la position par rapport à 1 de la première valeur propre d'un problème aux limites généralisé scalaire à spectre ponctuel.

ABSTRACT

Starting from the principle of energy, we show that the 2-dimensional MHD stability of any 2-dimensional equilibrium is determined by the position with respect to 1 of the first eigenvalue of a scalar generalized boundary value problem.

0. - INTRODUCTION

Considérons un plasma à l'équilibre dans une région Ω_o entourée par une coque parfaitement conductrice Γ_o. Le plasma occupe la région Ω, de bord Γ, tandis que la région complémentaire Ω^c est vide. L'équilibre est décrit par le champ magnétique B (défini sur Ω_o) et la pression P (définie sur Ω) qui vérifient :

$$(0.1)\quad \begin{cases} \text{grad } P = \text{rot } B \times B & \text{dans } \Omega, \\ \text{rot } B = 0 & \text{dans } \Omega^c, \\ \text{div } B = 0 & \text{dans } \Omega_o, \\ B \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ B \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_o. \end{cases}$$

Nous supposerons, pour simplifier, que les fonctions P et B et leurs dérivées n'ont pas de saut à travers Γ [1] :

$$(0.2)\quad \text{rot } B = 0 \ , \ \text{grad } P = 0 \ , \ P=0 \text{ sur } \Gamma.$$

Par linéarisation du problème MHD évolutif, J.B. BERNSTEIN et al [3] ont obtenu un critère de stabilité connu sous le nom de principe de l'énergie.

Etant donnée une fonction ξ définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}^3$, qui représente les déplacements lagrangiens du fluide, la variation première de l'énergie potentielle est donnée par δW

$$(0.3)\quad \begin{cases} \delta W = -\frac{1}{2} \int_\Omega F(\xi) \cdot \xi \, dx, \\ Q = \text{rot } (\xi \times B), \\ F(\xi) = \text{rot } B \times Q - B \times \text{rot } Q + \text{grad}(\gamma P \, \text{div}\, \xi + \xi \cdot \text{grad } P), \end{cases}$$

($\gamma = 5/3$, constante de chaleur spécifique).

---

(1) sinon, la condition sur Γ est $P + \frac{1}{2} B^2$ continu.

Etant donné un déplacement ξ sur Ω, on lui associe un potentiel vecteur A sur Ω^c par :

$$(0.4)\quad \begin{cases} \text{rot (rot A)} = 0 \text{ sur } \Omega^c, \\ n \times A = -(n \cdot \xi)B \text{ sur } \Gamma, \\ n \times A = 0 \text{ sur } \Gamma_o. \end{cases}$$

Comme le problème évolutif est à frontière libre, les déplacements doivent vérifier une relation de compatibilité sur la frontière libre Γ ; c'est la condition (0.5) ci-dessous

(0.5) $\quad B \cdot \text{rot}(\xi \times B) = B \cdot \text{rot } A$ sur Γ, où A vérifie (0.4).

Le critère de stabilité est le suivant : un équilibre est stable si et seulement si $\delta W \geq 0$ pour tout déplacement ξ vérifiant (0.5).

Considérons maintenant un équilibre bidimensionnel (c.a.d vérifiant $\frac{\partial B}{\partial x_3} = 0$, $B_3 = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x_3} = 0$).

Nous désignons maintenant par Ω_o, Ω, Ω^c les sections par un plan $x_3 = \text{cte}$ des régions définies précédemment.

Il est connu (cf. G. BATEMAN [2], R. TEMAM [17]) que d'une part il existe une fonction flux ψ définie sur Ω_o telle que

$$B = e_3 \times \nabla\psi$$

que, d'autre part, quitte à subdiviser Ω en $\{\omega_i\}_{i=1}^m$, il existe des fonctions P_i telles que

$$P(x) = P_i(\psi(x)) \text{ sur } \omega_i,$$

et enfin que les fonctions ψ et P_i sont liées par les équations de Stokes-Grad-Shafranof

$$(0.6)\quad -\Delta\psi = P_i'(\psi) \text{ sur } \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Considérons maintenant des déplacements ξ tels que $\frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0$ et $\xi_3 = 0$. Après quelques calculs algébriques, nous obtenons pour $F(\xi)^3$:

$$F(\xi) = (\Delta v_1 + P_i''(\psi)v_1) \text{ grad } \psi + \text{grad}(\gamma P \text{ div } \xi) \qquad \text{sur } \omega_i,\ 1 \le i \le m,$$

où $v_1 = \xi \cdot \nabla\psi$; d'où, d'après (0.3),

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta v_1 \cdot v_1 \, dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{\omega_i} P_i''(\psi) v_1^2 \, dx - \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla(P \text{ div } \xi)\cdot\xi \, dx.$$

Utilisant la formule de Green et la condition $P=0$ sur Γ, nous obtenons, en notant n la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω :

$$\begin{aligned}(0.7)\qquad \delta W = {} & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_1|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial n}\cdot v_1 \, d\sigma + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega P(\text{div } \xi)^2 \, dx \\ & - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{\omega_i} P_i''(\psi)\, v_1^2 \, dx.\end{aligned}$$

Pour expliciter la condition d'admissibilité (0.5), nous introduisons l'unique solution v_2 du problème

$$(0.8)\qquad \begin{cases} \Delta v_2 = 0 \text{ dans } \Omega^c, \\ v_2 = v_1 \text{ sur } \Gamma, \\ v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_o. \end{cases}$$

Nous vérifions que le champ défini par $A = v_2 e_3$ vérifie (0.4) et que la condition (0.5) peut s'écrire

$$(e_3 \times \nabla\psi).(e_3 \times \nabla v_1 - e_3 \times \nabla v_2) = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

ou encore, en supposant que $\nabla\psi(x) \neq 0$ p.p. sur Γ,

$$(0.9)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{\partial v_2}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma, \text{ où } v_2 \text{ est défini par (0.8).}$$

Le principe de l'énergie en dimension deux est donc le suivant : un équilibre est 2d-stable si et seulement si δW défini par (0.7) est positif ou nul pour tout déplacement $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tel que $v_1 = \xi\cdot\nabla\psi$ vérifie (0.9).

Extension du principe de l'énergie.

Puisque la normale n est dirigée vers l'intérieur de Ω^c, la formule de Green et (0.8) donnent

$$\int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial n} v_2 \, d\sigma = -\int_{\Omega^c} |\nabla v_2|^2 \, dx.$$

D'après (0.8),(0.9), nous avons donc

$$\int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial n} v_1 \, d\sigma = -\int_{\Omega^c} |\nabla v_2|^2 \, dx.$$

Notant v la fonction définie sur Ω_o par v_1 sur Ω et v_2 sur Ω^c, nous déduisons de (0.7)

$$(0.10) \qquad \delta W = \frac{1}{2}\int_{\Omega_o} |\nabla v|^2 \, dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega P(\operatorname{div}\xi)^2 dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i} P_i''(\psi) v^2 \, dx.$$

Utilisant un raisonnement analogue à celui de I.B. BERNSTEIN et al. dans [3] (c.à d. une modification de ξ au voisinage de Γ), il est possible de montrer que si δW défini par (0.10) est strictement négatif pour un déplacement $\xi : \Omega \to \mathbf{R}^2$ et une fonction $v_2 : \Omega^c \to \mathbf{R}$ vérifiant

$$(0.11) \qquad v_2 = \xi \cdot \nabla\psi \quad \text{sur } \Gamma \text{ et } v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_o,$$

alors il existe $\tilde{\xi} : \Omega \to \mathbf{R}^2$ vérifiant (0.9) tel que δW soit strictement négatif.

Ainsi, un équilibre est 2d-stable si et seulement si δW défini par (0.10) est positif ou nul pour tout $\xi : \Omega \to \mathbf{R}^2$ et tout $v_2 : \Omega^c \to \mathbf{R}$ vérifiant (0.11).

1.3. Transformation du principe de l'énergie.

De l'égalité

$$\inf_{\xi, v_2 \text{ verif.}(0.11)} = \inf_{v \text{ t.q. } v=0 \text{ sur } \Gamma_o} \left\{ \inf_{\xi \text{ t.q. } \xi\cdot\nabla\psi = v|_\Omega} \right\},$$

nous déduisons le critère de stabilité :

$$(0.12) \qquad 0 \le \inf_{v \text{ t.q. } v=0 \text{ sur } \Gamma_o} \left\{ \frac{1}{2}\int_{\Omega_o} |\nabla v|^2 dx + \gamma J(v) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i} P_i''(\psi) v^2 dx \right\},$$

où

$$(0.13) \qquad J(v) = \inf_{\xi \text{ t.q. } \xi\cdot\nabla\psi = v|_\Omega} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega P(\operatorname{div}\xi)^2 \, dx \right\}.$$

Le problème est donc de savoir si on a Inf $\delta W \geq 0$. Mais la mise en oeuvre directe de ce critère se heurte à une difficulté mathématique importante : l'existence d'un spectre continu (cf. H. GRAD [6], J. DESCLOUX- G. GEYMONAT [4]). D'un point de vue numérique, il existe plusieurs codes d'éléments finis qui peuvent déterminer la stabilité d'un équilibre axisymétrique général par rapport à un mode m quelconque[(1)] (cf. [9] pour le code ERATO et [8] pour le code PEST). Dans ces codes, la difficulté due à la présence du spectre continu est résolue par l'emploi d'éléments finis de type mixte ou hydride.

Nous proposons ici d'évaluer analytiquement J(v) au lieu de l'évaluer numériquement. En effet, une estimation de J(v) (proche de l'optimal) est fournie par le théorème intégral de H. Federer (rappelé au n° 1) et des constructions astucieuses (partie n° 3).

Cela conduit à un quotient de Rayleigh avec des "queer" dérivées (terminologie de H. GRAD), puis finalement à un problème aux limites scalaire à spectre ponctuel (exposé au n° 4).

Le problème modèle étudié ici est une étape dans l'étude de la stabilité axisymétrique (m=0) d'un équilibre axisymétrique quelconque (y compris les doublets). Signalons que la stabilité axisymétrique a été étudiée par E. REBHAN, A. SALAT pour des équilibres à pression uniforme [13].

L'auteur remercie H. GRAD, W. GROSSMANN et H. WEITZNER pour d'intéressantes discussions sur ce sujet durant une visite à l'Institut Courant.

---

(1) mode m : $\xi(r,\theta,z) = \exp(im\theta)\ \{\xi_r(r,z)e_r + \xi_\theta(r,z)e_\theta + \xi_z(r,z)e_z\}$.

1. - IMAGE DIRECTE D'UNE DISTRIBUTION

Les parties 1 et 2 développent des outils dont la base est le théorème intégral de H. Federer.

Nous considérons une application ψ lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. D'après le théorème de Rademacher (cf. H. FEDERER [5]), une telle application est différentiable presque partout. Nous pouvons donc considérer pour presque tout $a \in \mathbb{R}^n$ l'opérateur $D\psi(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Nous définissons le jacobien d'ordre k de ψ par

$$J_k\psi(a) = \|\Lambda_k D\psi(a)\|$$

et en particulier

$$J_1\psi(a) = \|D\psi(a)\| .$$

D'autre part, nous désignons par $\mathcal{H}^k$ la mesure de Hausdorff d'ordre k (cf. C.A. ROGERS [14]).

Théorème intégral de H. FEDERER

Si ψ est lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ avec $n > m$, pour toute fonction g mesurable à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}$ nous avons

i) si $g \geq 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^n$,

$$(1.1) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, J_m\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\psi^{-1}\{y\}} g(x)\, d\mathcal{H}^{n-m}(x)dy \quad ;$$

ii) g est $J_m\psi(x)dx$ intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\psi^{-1}\{y\}} |g(x)|\, d\mathcal{H}^{n-m}(x)dy < \infty \quad ;$$

iii) si g est $J_m\psi(x)dx$ intégrable, (1.1) a lieu.

Soit maintenant Ω un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$, ω un ouvert quelconque de $\mathbf{R}$ et ψ une application de Ω dans ω vérifiant :

(1.2) ψ est de classe C^∞ et propre[1] de Ω dans ω ;

(1.3) ψ admet un prolongement lipschitzien à $\mathbf{R}^n$;

(1.4) $\nabla\psi(x) \neq 0$ p.p. $x \in \Omega$.

Sous la condition (1.2), nous savons définir (cf. L. SCHWARTZ [15]) l'image directe de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par ψ :

(1.5) $$\langle \psi_{\#}T, \phi \rangle = \langle T, \phi(\psi) \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\omega).$$

([1]) c.à d. l'image réciproque de tout compact est un compact.

Nous savons que l'application $\psi_\#$ est linéaire continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\omega)$.

Grâce au théorème intégral de Federer, nous avons la

Proposition 1.1 : Sous les conditions (1.2)-(1.4), l'application $\psi_\#$ définie par (1.5) a les propriétés suivantes

i) $\psi_\#(L^1_{loc}(\Omega)) \subset L^1_{loc}(\omega)$ et $\psi_\#(L^1(\Omega)) \subset L^1(\omega)$,

ii) $\psi_\#$ est continue de $L^1_{loc}(\Omega)$ (resp. $L^1(\Omega)$) dans $L^1_{loc}(\omega)$ (resp. $L^1(\omega)$),

iii) pour toute fonction $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, notant $d\mu(x) = |\nabla\psi(x)|^{-1} d\mathcal{H}^{n-1}(x)$,

$$(1.6) \qquad \psi_\#(g)(y) = \int_{\psi^{-1}\{y\}} g(x)\, d\mu(x) \quad \text{p.p. } y \in \Omega.$$

Démonstration : Soit $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ et K un compact quelconque de ω. Soit h la fonction définie par

$$h(y) = \int_{\psi^{-1}\{y\}} g\, d\mu(x).$$

D'après le théorème intégral de Federer, h est intégrable sur K si et seulement si $g\cdot|\nabla\psi|^{-1}$ est $|\nabla\psi|\,dx$ intégrable sur $\psi^{-1}(K)$, c.à d. si et seulement si g est intégrable sur $\psi^{-1}(K)$. Ceci est vrai grâce à (1.2). Nous en déduisons que $h \in L^1_{loc}(\omega)$. Nous avons aussi

$$|h|_{L^1(K)} \leq |g|_{L^1(\psi^{-1}(K))}$$

Soit maintenant $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$. Par définition

$$\langle \psi_\#(g), \phi \rangle = \langle g, \phi(\psi) \rangle \ ;$$

d'où

$$\langle \psi_\#(g), \phi \rangle = \int_\Omega g(x)\, \phi(\psi(x))dx \ .$$

Utilisons le théorème intégral de Federer pour la fonction $g(x)\phi(\psi(x))|\nabla\psi(x)|^{-1}$, qui est $|\nabla\psi(x)|\,dx$ intégrable. Nous obtenons

$$\langle \psi_{\#}(g), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\psi^{-1}\{y\}} g(x)\phi(\psi(x))d\mu(x)\, dy$$

d'où

$$\langle \psi_{\#}(g), \phi \rangle = \int_{\omega} \phi(y) \int_{\psi^{-1}\{y\}} g(x)d\mu(x)\, dy,$$

$$\langle \psi_{\#}(g), \phi \rangle = \int_{\omega} h(y)\phi(y)\, dy,$$

ce qui démontre que $\psi_{\#}(g) = h$. Les propriétés i), ii), iii) avec L^1_{loc} en découlent.

Soit maintenant $g \in L^1(\Omega)$. D'après les résultats précédents, nous avons $\psi_{\#}(g) = h$ et le théorème intégral de Federer appliqué à $g \cdot |\nabla\psi|^{-1}$ entraîne que $h \in L^1(\omega)$ et que

$$|h|_{L^1(\omega)} \leq |g|_{L^1(\Omega)} \cdot \blacksquare$$

Proposition 1.2 : Sous les hypothèses (1.2)-(1.4), $\psi_{\#}$ a les propriétés suivantes

i) pour $1 < q < \infty$ et pour $g \in L^q_{loc}(\Omega)$ (resp. $L^q(\Omega)$), on a

$$(\rho^{\frac{1-q}{q}} \cdot \psi_{\#}(g))|_{\omega'} \in L^q_{loc}(\omega) \quad (\text{resp. } L^q(\omega)),$$

et

$$(1.7) \qquad \int_{K\cap\omega'} \rho^{1-q} |\psi_{\#}(g)|^q dx \leq \int_{f^{-1}(K)} |g|^q\, dx \text{ pour tout compact } K \text{ de } \omega.$$

où $\rho(y) = \int_{\psi^{-1}\{y\}} d\mu$ et $\omega' = \{y \in \omega \text{ t.q. } \rho(y) > 0\}$;

ii) il y a égalité dans (1.6) si et seulement si g est constant sur $\psi^{-1}\{y\}$ pour presque tout $y \in K$.

Démonstration : Puisque $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, d'après la proposition 1.1, $\psi_{\#}(g) \in L^1_{loc}(\omega)$ avec

$$\psi_{\#}(g)(y) = \int_{\psi^{-1}\{y\}} g(x)d\mu(x).$$

Appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$(1.8) \qquad |\psi_{\#}(g)(y)| \leq \rho(y)^{\frac{q-1}{q}} \left[\int_{\psi^{-1}\{y\}} |g|^q \, d\mu\right]^{1/q} .$$

pour $y \in \omega'$, $\rho(y) \neq 0$ d'où

$$(1.9) \qquad \rho(y)^{1-q}|\psi_{\#}(g)(y)|^q \leq \int_{\psi^{-1}\{y\}} |g|^q \, d\mu.$$

Pour un compact K de ω :

$$\int_{K\cap\omega'} \rho^{1-q}|\psi_{\#}(g)|^q dy \leq \int_K \int_{\psi^{-1}\{y\}} |g|^q \, d\mu \, dy ,$$

or, d'après le théorème intégral de Federer, le terme de droite vaut

$$\int_{\psi^{-1}(K)} |g|^q \, dx,$$

d'où la propriété i).

Il n'y aura égalité dans (1.7) que si il y a égalité dans (1.8), ce qui donne g = cte sur $\psi^{-1}\{y\}$. ■

Proposition 1.3 : Sous les hypothèses (1.2)(1.3), pour tout $T \in (\mathcal{D}'(\Omega))^n$, nous avons

$$(1.10) \qquad \psi_{\#}(\text{div } T) = (\psi_{\#}(T\cdot\nabla\psi))'.$$

Démonstration : Ce résultat se déduit trivialement des définitions de l'image directe et de la dérivée d'une distribution. La distribution de gauche dans (4.8) prend sur $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$ la valeur

$$\langle \text{div } T, \phi(\psi)\rangle$$

ce qui vaut

$$-\langle T, \nabla(\phi(\psi))\rangle = -\langle T, \phi'(\psi)\nabla\psi\rangle$$

ou encore

$$-\prec T\cdot\nabla\psi,\phi'(\psi)\succ \quad ;$$

ce qui donne

$$-\prec \psi_{\#}(T\cdot\nabla\psi),\phi'\succ \ ,$$

d'où finalement

$$\prec(\psi_{\#}(T\cdot\nabla\psi))',\phi\succ \ . \ \blacksquare$$

Remarque 1.1 : La relation (1.10) est une généralisation de la relation ci-dessous démontrée par G. VIGFUSSON dans [18] :

$$(1.11)\qquad \frac{d}{dy}\int_{\psi^{-1}\{y\}} g\,\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} = \int_{\psi^{-1}\{y\}} \operatorname{div}\left(g\,\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right)\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \quad \text{p.p. } y.$$

Proposition 1.4 : Sous les hypothèses (1.2)(1.3), soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un difféomorphisme de classe C^∞ de $\tilde{\Omega}$ sur Ω. Alors, pour tout $g \in L^1_{loc}(\Omega)$,

$$(1.12)\qquad \int_{\psi^{-1}\{y\}} g\,\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} = \int_{\tilde{\psi}^{-1}\{y\}} \tilde{g}\,|J_F|\,\frac{d\sigma}{|\nabla\tilde{\psi}|} \quad \text{p.p. } y \in \omega$$

où $\tilde{\psi} = \psi o F$, $\tilde{g} = g o F$, J_F est le jacobien de F.

Démonstration : La formule de changement de variable donne, pour $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega g(x)\phi(\psi(x))dx = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{g}(x')\phi(\tilde{\psi}(x'))\,|J_F|\,dx'.$$

Utilisant le théorème intégral de Federer, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(y) \int_{\psi^{-1}\{y\}} g\,\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\,dy = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \int_{\tilde{\psi}^{-1}\{y\}} \tilde{g}\,\frac{d\sigma}{|\nabla\tilde{\psi}|}\,dy.$$

Cette égalité ayant lieu pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$, nous en déduisons (1.11). $\blacksquare$

2. - CONSTRUCTION ET ETUDE DES ESPACES FONCTIONNELS.

Dans les parties 2 et 3, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ de classe C^∞, Ω étant localement d'un seul côté de Γ.

Nous supposons donnée une fonction ψ sur $\overline{\Omega}$, de classe C^∞, telle que

(2.1) ψ est constante sur les composantes connexes de Γ,

(2.2) ψ n'a pas de point critique sur Γ,

(2.3) les points critiques de ψ sont réguliers[1].

Chaque composante connexe Γ_i de Γ est une courbe de Jordan et possède donc un intérieur et un extérieur. Nous supposons que

(2.4) $\frac{\partial \psi}{\partial n} < 0$ sur Γ_i, où n est une normale dirigée vers l'extérieur de Γ_i.

Nous appelons séparatrice une courbe de niveau de ψ qui possède (au moins) un point double. Nous ferons éventuellement l'hypothèse que

(2.5) les séparatrices n'ont qu'un seul point double.

Nous introduisons ω_i, $1 \le i \le m$, les composantes connexes de $\Omega \backslash \Sigma$ où Σ est l'union des séparatrices. Nous notons ψ_i la restriction de ψ à ω_i, α_i et β_i le minimum et le maximum de ψ_i sur $\overline{\omega}_i$.

La théorie de Morse d'une part et la théorie du degré topologique d'autre part (cf. J. MILNOR [11]) permettent de déduire de (2.1)-(2.4) les propriétés suivantes qui nous seront utiles pour la suite

P1) les points critiques de ψ sont en nombre fini ; ce sont des maxima relatifs ou des point -selle ;

P2) pour chaque i, $1 \le i \le m$, ω_i est soit simplement connexe, soit homéomorphe à un anneau ; dans le premier cas, ψ_i n'atteint la valeur α_i que sur $\partial\omega_i$ et la valeur β_i qu'en un point ; dans le second cas, ψ_i n'atteint la valeur α_i que sur la frontière extérieure de ω_i et β_i sur la fron-

---

[1] c.à d. la hessienne de ψ en x est non dégénérée.

tière intérieure de ω_i ;

P3) pour tout i, $1 \le i \le m$ et tout t, $\alpha_i < t < \beta_i$, l'ensemble $\psi_i^{-1}\{t\}$ est une courbe fermée simple.

Par ailleurs, grâce au théorème intégral de Federer, pour tout $v \in L^1(\Omega)$ il est possible de définir une fonction $\psi_{i\#}(v) \in L^1(]\alpha_i,\beta_i[)$ par

$$\psi_{i\#}(v)(t) = \int_{\psi_i=t} v \, d\mu \text{ où } d\mu = \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} .$$

L'application $\psi_{i\#}$ est continue de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(]\alpha_i,\beta_i[)$. Nous noterons $\rho_i = \psi_{i\#}(1)$, c.à d. $\rho_i(t) = \int_{\psi_i=t} d\mu$. D'après le théorème intégral de Federer, $|\rho_i|_{L^1} = \text{mes}(\omega_i)$.

Supposons par ailleurs donnée une fonction mesurable P de Ω dans $\mathbf{R}_+$ telle que

(2.6) P est constante sur les composantes connexes des ensembles où ψ est constante ;

(2.7) $\frac{1}{P} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$.

D'après P3), il existe des fonctions P_i de $]\alpha_i,\beta_i[$ dans $\mathbf{R}_+$ telles que $P(x) = P_i(\psi(x)$ pour $x \in \omega_i$. Puisque

$$P_i = \rho_i^{-1} . \psi_{i\#}(P),$$

les fonctions P_i sont mesurables.

Nous pouvons maintenant définir un espace $\tilde{W}$ qui dépendra de Ω, ψ, P et d'un réel q, $1 \le q \le \infty$,

$$\tilde{W}_P^{\,q}(\Omega,\psi) = \begin{cases} v \in L^1(\Omega) \text{ tel que, pour } 1 \le i \le m, \\ \\ (\psi_{i\#}(v))' \in L^1_{loc}(]\alpha_i,\beta_i[) \text{ et } P_i^{1/q} \, \rho_i^{\frac{1-q}{q}} \, (\psi_{i\#}(v))' \in L^q(]\alpha_i,\beta_i[) \end{cases}$$

où $(\psi_{i\#}(v))'$ désigne la dérivée de $\psi_{i\#}(v)$ au sens de $\mathcal{D}'(]\alpha_i,\beta_i[)$.

Nous munissons cet espace de la norme

$$\|v\|_q = |v|_{L^1(\Omega)} + \{\sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} p_i \rho_i^{1-q} |(\psi_{i\#}(v))'|^q \, dt\}^{1/q}.$$

Nous démontrerons le

Théorème 2.1 : Sous les hypothèses (2.1)-(2.4) et (2.6)-(2.7), l'espace $\tilde{W}_p^q(\Omega,\psi)$ défini ci-dessus est un espace de Banach. De plus, l'application $\psi_{i\#}$ est continue de $\tilde{W}_p^q(\Omega,\psi)$ dans $C^0(]\alpha_i,\beta_i[)$ (resp. dans $C^0([\alpha_i,\beta_i])$ pour $1 \le i \le m$ (resp. pour i tel que $\bar{\omega}_i \subset \Omega$).

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses (2.1)-(2.7). Grâce au théorème précédent, il est possible de définir les conditions aux limites suivantes.

Soit $x \in \Omega$ un point critique de ψ et $t = \psi(x)$;

i) si x est un point d'extremum relatif, nous imposons

(2.8) $\quad \psi_{i\#}(v)(t) = 0$, où i est défini par $x \in \omega_i$

ii) si x est un point-selle, nous imposons

(2.9) $\quad \psi_{i_1\#}(v)(t) = \psi_{i_2\#}(v)(t) + \psi_{i_3\#}(v)(t)$

où (cf. Fig. 3.1)

$\partial\omega_{i_1}$ contient la séparatrice passant par x,

$\partial\omega_{i_2}, \partial\omega_{i_3}$ contiennent x.

Nous définissons le sous espace de $\tilde{W}_p^q(\Omega,\psi)$:

$$W_p^q(\Omega,\psi) = \{v \in \tilde{W}_p^q(\Omega,\psi), \text{ v vérifiant les conditions aux limites ci-dessus}\},$$

qui est muni de la norme induite.

D'après le théorème 2.1, $W_p^q(\Omega,\psi)$ est un sous-espace fermé d'un espace de Banach ; c'est donc un espace de Banach.

Démonstration du théorème 2.1 : Vérifions tout d'abord que l'espace $W_p^q(\Omega,\psi)$ est complet. Soit $\{v_n\}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_q$. Puisque $L^1(\Omega)$ et $L^q(]\alpha_i,\beta_i[)$ sont des espaces complets, nous obtenons l'existence

de $v \in L^1(\Omega)$ et $f_i \in L^q(]\alpha_i,\beta_i[)$ tels que

$$v_n \to v \text{ dans } L^1(\Omega), \tag{2.10}$$

$$P_i^{1/q} \cdot \rho_i^{\frac{1-q}{q}} (\psi_{i\#}(v_n))' \to f_i \text{ dans } L^q(]\alpha_i,\beta_i[). \tag{2.11}$$

Soit q le nombre réel conjugué de q ($\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$). De l'identité $q' \cdot \frac{q-1}{q} = 1$ et de $\rho_i \in L^1(]\alpha_i,\beta_i[)$, nous déduisons

$$\rho_i^{\frac{q-1}{q}} \in L^{q'}(]\alpha_i,\beta_i[).$$

Multipliant (2.11) par $\rho_i^{\frac{q-1}{q}}$ et utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$P_i^{1/q}(\psi_{i\#}(v_n))' \to \rho_i^{\frac{q-1}{q}} f_i \text{ dans } L^1(]\alpha_i,\beta_i[). \tag{2.12}$$

Par ailleurs, d'après (2.4) et P2), l'application ψ est propre de Ω dans $]\alpha_1,+\infty[$ (c.à d. l'image réciproque de tout compact est un compact). En conséquence, $\frac{1}{P} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ entraîne

$$\frac{1}{P_i} \in L^\infty_{loc}(]\alpha_i,\beta_i[) \text{ pour } 1 \le i \le m \text{ et } \frac{1}{P_i} \in L^\infty(]\alpha_i,\beta_i[) \text{ pour } \bar{\omega}_i \subset \Omega . \tag{2.13}$$

Multipliant (2.12) par $P_i^{-1/q}$, nous obtenons

$$(\psi_{i\#}(v_n))' \to P_i^{-1/q} \rho_i^{\frac{q-1}{q}} f_i \text{ dans } L^1_{loc}(]\alpha_i,\beta_i[). \tag{2.14}$$

Par ailleurs, (2.10) et la continuité de $\psi_{i\#}$ entraîne que

$$\psi_{i\#}(v_n) \to \psi_{i\#}(v) \text{ dans } L^1(]\alpha_i,\beta_i[) ,$$

ce qui entraine que

$$(\psi_{i\#}(v_n))' \to (\psi_{i\#}(v))' \text{ dans } \mathcal{D}'(]\alpha_i,\beta_i[).$$

Comparant avec (2.14), nous obtenons $(\psi_{i\#}(v))' \in L^1_{loc}(]\alpha_i,\beta_i[)$ et

$$P_i^{-1/q} \cdot \rho_i^{\frac{q-1}{q}} \cdot f_i = (\psi_{i\#}(v))' \text{ p.p. } t \in]\alpha_i,\beta_i[.$$

Multipliant la fonction $(\psi_{i\#}(v))'$ par la fonction $P_i^{1/q} \rho_i^{\frac{1-q}{q}}$, nous obtenons

$$f_i = P_i^{1/q} \rho_i^{\frac{1-q}{q}} (\psi_{i\#}(v))' \in L^q(]\alpha_i,\beta_i[),$$

ce qui, avec (2.11), montre que $v_n \to v$ dans $\tilde{W}_P^q(\Omega,\psi)$.

Etudions maintenant la continuité des applications $\psi_{i\#}$. Utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder pour

$$P_i^{1/q}(\psi_{i\#}(v))' = \rho_i^{\frac{q-1}{q}} \cdot P_i^{1/q} \rho_i^{\frac{1-q}{q}} (\psi_{i\#}(v))' ,$$

nous obtenons

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i^{1/q} |\psi_{i\#}(v)'| dt \le \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \rho_i \, dt\right)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i \rho_i^{1-q} |\psi_{i\#}(v)'|^q dt\right)^{1/q} ,$$

d'où

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i^{1/q} |\psi_{i\#}(v)'| dt \le \text{mes}(\omega_i)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \|v\|_q .$$

Grâce à (2.13), nous obtenons pour i tel que $\bar{\omega}_i \subset \Omega$ l'existence d'une constante telle que

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\psi_{i\#}(v)'| dt \le C \|v\|_q \quad \forall v \in \tilde{W}^q(\Omega,\psi),$$

et pour tout i nous obtenons qu'il correspond à $\alpha > \alpha_i$ et $\beta < \beta_i$ une constante C telle que

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\psi_{i\#}(v)'| dt \le C \|v\|_q \quad \forall v \in \tilde{W}^q(\Omega,\psi).$$

Le théorème découle de l'injection continue de $W^{1,1}_{loc}(]\alpha,\beta[)$ dans $C^o(]\alpha,\beta[)$ et de $W^{1,1}(]\alpha,\beta[)$ dans $C^o([\alpha,\beta])$. ■

Fonctions régulières de $W_P^q(\Omega,\psi)$.

Nous donnons une condition nécessaire pour qu'une fonction régulière appartienne à l'espace $W_P^q(\Omega,\psi)$, qui peut servir à interpréter les conditions aux limites aux points critiques de ψ.

Proposition 2.1 : Sous les hypothèses (2.1)-(2.7), toute fonction $v \in W_P^q(\Omega,\psi) \cap C^\circ(\Omega)$ vérifie

(2.15) $\quad v(x) = 0$ pour tout point d'extremum relatif de ψ

et toute fonction $v \in W_P^q(\Omega,\psi) \cap C^\eta(\Omega)$ (pour $\eta > 0$) vérifie

(2.16) $\quad v(x) = o$ pour tout point critique de ψ.

Démonstration :

i) Soit x_o un point d'extremum relatif de ψ. D'après le lemme de Morse, il existe une difféomorphisme F de classe C^∞ de la boule unité B_1 de $\mathbb{R}^2$. dans un voisinage de x_o tel que

$$\tilde{\psi}(y) = \psi(F(y)) = \psi(x_o) - \frac{1}{2}\{y_1^2+y_2^2\} \qquad \forall y \in B_1$$

(d'après (2.4) les extrema relatifs sont des maxima relatifs).

Grâce à la proposition 4.4 et à $|\nabla\tilde{\psi}| = r$, nous obtenons

$$\psi_{i\#}(v)(t) = \int_{\psi_i^{-1}\{t\}} v\,\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} = \int_{\tilde{\psi}_i^{-1}\{t\}} v(F(y))\,|J_F(y)|\,\frac{d\sigma}{r} \quad .$$

Puisque $\tilde{\psi}_i^{-1}\{t\}$ est un cercle, nous pouvons passer en coordonnées polaires et nous obtenons

$$\psi_{i\#}(v)(t) = \int_o^{2\pi} v(F(r,\theta))\,|J_F(r,\theta)|\,d\theta \text{ où } r = 2\sqrt{\psi(x_o)-t}.$$

Faisant tendre t vers $\psi(x_o)$, (2.8) entraîne (2.15).

ii) Soit x_o un point-selle de ψ. D'après le lemme de Morse, il existe un difféomorphisme de classe C^∞ du carré unité C_1 dans un voisinage $V(x_o)$ tel que (on a posé $\psi(x_o) = 0$)

$$\tilde{\psi}(y) = \psi(F(y)) = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) \quad \forall y \in C_1 .$$

D'après la proposition 4.4, nous avons

$$\psi_{i\#}(v)(t) = \int_{\psi_i^{-1}\{t\}\setminus V(x_o)} v \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} + \int_{\tilde{\psi}_i^{-1}\{t\}} v(F(y))|J_F(y)| \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} .$$

D'après l'hypothèse (2.5), la séparatrice passant par x_o n'a pas d'autre point double que x_o ; la première intégrale a donc une limite finie lorsque t tend vers $\psi(x_o)$. Le deuxième terme peut s'écrire sous la forme

$$(2.17) \qquad v(x_o)\int_{\tilde{\psi}^{-1}\{t\}} |J_F(y)| \frac{d\sigma}{|\nabla\tilde{\psi}|} + \int_{\tilde{\psi}^{-1}\{t\}} (v(F(y))-v(x_o))|J_F(y)| \frac{d\sigma}{|\nabla\tilde{\psi}|} .$$

Les courbes $\tilde{\psi}^{-1}\{t\}$ sont des branches d'hyperbole équilatère, qui peuvent être paramètrées par

$$y_1 = \sqrt{2t}\ \mathrm{ch}\ z,\ y_2 = \sqrt{2t}\ \mathrm{sh}\ z \text{ où } |z| \leq \mathrm{Arg\,ch}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right).$$

Or il est possible de démontrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\eta > 0$ et pour tout t tel que $0 < t < 1$:

$$(2.18) \qquad (2t)^{\eta/2} \int_{-\mathrm{Argch}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)}^{+\mathrm{Argch}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)} (\mathrm{ch}^2 z + \mathrm{sh}^2 z)^{\eta/2}\, dz \leq C,$$

et que, pour $\eta=0$, l'intégrale ci-dessus tend vers l'infini lorsque t tend vers 0. Nous en déduisons que si $v(x_o) > 0$, la première intégrale de (2.17) tend vers $+\infty$ et que la seconde est bornée ; en conséquence, $\psi_{i\#}(v)(t) \to +\infty$ pour $t \to \psi(x_o)$, ce qui contredit $\psi_{i\#}(v) \in C^o([\alpha_i,\beta_i])$. Nous avons donc (2.16).

■

Un résultat d'inclusion.

Proposition 2.2 : Sous les hypothèses (2.1)-(2.4) et (2.6)-(2.7), ainsi que l'hypothèse $P \in L^1(\Omega)$, l'injection de $W_P^{q_2}(\Omega,\psi)$ dans $W_P^{q_1}(\Omega,\psi)$ est continue pour tout $q_1 \leq q_2$.

Démonstration :

Nous appliquons l'inégalité de Hölder à

$$P_i\rho_i^{1-q_1}|(\psi_{i\#}(v))'|^{q_1} = \{P_i\rho_i\}^{\frac{q_2-q_1}{q_2}} \cdot \{P_i\rho_i^{1-q_2}|\psi_{i\#}(v)'|^{q_2}\}^{q_1/q_2}$$

avec $q = \frac{q_2}{q_2-q_1}$, $q' = \frac{q_2}{q_1}$ (où $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$). Nous obtenons

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i\rho_i^{1-q_1}|\psi_{i\#}(v)'|^{q_1}dt \le \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i\rho_i dt\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_2}} \cdot \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i\rho_i^{1-q_2}|\psi_{i\#}(v)'|^{q_2}dt\right)^{q_1/q_2}.$$

Or, d'après le théorème intégral de Federer

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i\rho_i \, dt = \int_{\omega_i} P \, dx.$$

Faisant la somme en i et utilisant $\Sigma a_i b_i \le (\Sigma a_i^q)^{1/q} \cdot (\Sigma b_i^{q'})^{1/q'}$, nous obtenons

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i\rho_i^{1-q_1}|\psi_{i\#}(v)'|^{q_1} dt\right)^{1/q_1} \le \left(\int_{\Omega} P \, dx\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}} \left(\sum_{i=1}^{m}\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i\rho_i^{1-q_2}|\psi_{i\#}(v)'|^{q_2}dt\right)^{1/q_2}$$

d'où

$$\|v\|_{q_1} \le \{1+|P|_{L^1}^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}}\} \|v\|_{q_2} \qquad \forall v \in W_P^{q_2}(\Omega,\psi). \quad \blacksquare$$

3. - RESOLUTION D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION.

3.1. Enoncé du résultat principal.

Le cadre étant le même que dans la partie 2, nous introduisons l'espace

$$E_P^q(\Omega,\psi) = \{\xi \in (\mathcal{D}'(\Omega))^2 \text{ t.q. } \xi\cdot\nabla\psi \in L^1(\Omega),$$

$$\operatorname{div}\xi \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ et } P^{1/q}\operatorname{div}\xi \in L^q(\Omega)\} .$$

Le problème d'optimisation est le suivant : étant donné $v \in L^1(\Omega)$, calculer la valeur de

$$J_q(v) = \inf_{\substack{\xi \in E_P^q(\Omega,\psi) \\ \xi\cdot\nabla\psi = v}} \int_\Omega P|\operatorname{div}\xi|^q \, dx.$$

Le résultat est le suivant :

Théorème 3.1 : Sous les hypothèses (2.1)-(2.7), pour $v \in L^{2+\varepsilon}(\Omega)$ avec $\varepsilon > 0$,

i) si $v \notin W_P^q(\Omega,\psi)$, $J_q(v) = +\infty$

ii) si $v \in W^q(\Omega,\psi)$,

$$(3.1) \qquad J_q(v) \geq \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i \rho_i^{1-q} |(\psi_{i\#}(v))'|^q \, dt$$

avec égalité si ψ n'a pas de point-selle dans Ω ou si v est identiquement nul dans un voisinage des séparatrices.

Remarque 3.1 :- la question de l'égalité dans (3.1) dans le cas général est un problème ouvert.

3.2. Partie I de la démonstration.

Nous allons démontrer, en utilisant des résultats de la partie 1 , que pour toute distribution $\xi \in E^q(\Omega,\psi)$, la fonction $v = \xi\cdot\nabla\psi$ vérifie les conditions aux limites (2.8)(2.9) et la relation

$$(3.2)\qquad \sum_{i=1}^{m}\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i\rho_i^{1-q}\left|(\psi_{i\#}(v))'\right|^q dt \le \int_\Omega P\left|\operatorname{div}\xi\right|^q dx.$$

Les résultats i) et ii) en découlent, excepté l'égalité dans (3.1) dont la démonstration fera l'objet du §3.3.

Considérons une distribution $\xi \in E_P^q(\Omega,\psi)$. Grâce à (2.7), nous avons

$$(3.3)\qquad \operatorname{div}\xi \in L^q_{loc}(\Omega).$$

Nous allons étudier séparément le cas des ouverts ω_i simplement connexes et le cas des ouverts ω_i homéomorphes à un anneau.

i) ω_i <u>est simplement connexe</u>. Grâce à la propriété P2), l'application ψ_i est propre de ω_i dans $]\alpha_i,+\infty[$. Nous pouvons donc (cf. partie 1) définir une application $\psi_{i\#}$ de $\mathcal{D}'(\omega_i)$ dans $\mathcal{D}'(]\alpha_i,+\infty[)$ par

$$\langle\psi_{i\#}(T),\phi\rangle = \langle T,\phi(\psi_i)\rangle \qquad \forall\phi \in \mathcal{D}(]\alpha_i,+\infty[).$$

D'après la proposition 1.1, cette application coïncide sur $L^1(\omega_i)$ avec l'application $\psi_{i\#}$ définie dans la partie 2.

D'après la proposition 1.3, nous avons

$$(3.4)\qquad (\psi_{i\#}(v))' = \psi_{i\#}(\operatorname{div}\xi)$$

où la dérivée est prise au sens de $\mathcal{D}'(]\alpha_i,+\infty[)$. Puisque (3.3) entraîne que $\psi_{i\#}(\operatorname{div}\xi) \in L^1_{loc}(]\alpha_i,+\infty[)$, nous déduisons de (3.4) que $\psi_{i\#}(v) \in C^0(]\alpha_i,+\infty[)$. Revenant à la définition intégrale de $\psi_{i\#}$, nous en déduisons que

$$\psi_{i\#}(v)(\beta_i) = 0.$$

D'autre part, d'après (3.4) et (1.8) (cf. Proposition 1.2),

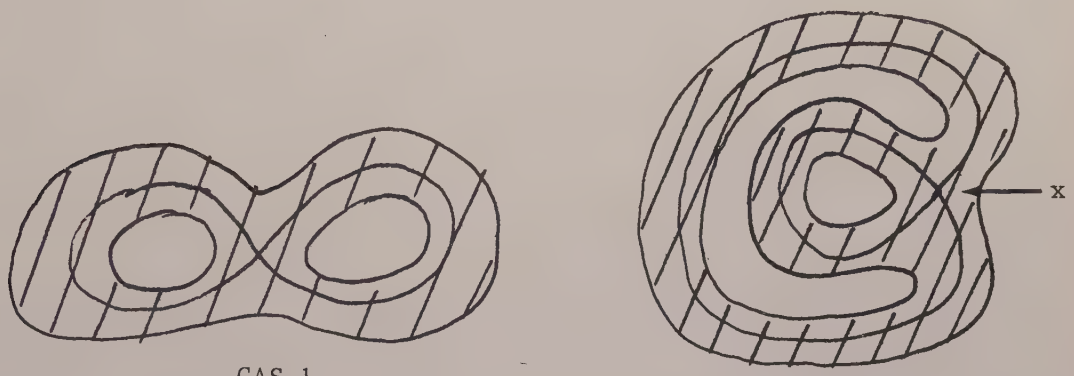
$$(3.5)\qquad \rho_i^{1-q}\left|(\psi_{i\#}(v))'\right|^q(t) \le \psi_{i\#}(\left|\operatorname{div}\xi\right|^q)(t),\ \alpha_i < t < \beta_i.$$

Multipliant (3.5) par $P_i(t)$, intégrant en t et utilisant le théorème intégral

de Federer pour transformer le terme de droite, nous obtenons

$$(3.6) \qquad \int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i \rho_i^{1-q} \cdot |(\psi_{i\#}(v))'|^q dt \leq \int_{\omega_i} P|\operatorname{div} \xi|^q \, dx.$$

ii) ω_i homéomorphe à un anneau. Considérons tout d'abord un point-selle de ψ $x \in \Omega$ et démontrons que v vérifie (2.9). Pour cela, nous introduisons l'ouvert $\omega' = \{x' \in \Omega \text{ t.q. } |\psi(x')-\psi(x)| < \varepsilon$ et ω la composante connexe de ω' contenant x (cf. fig. 3.1), ε étant un nombre réel positif choisi assez petit pour que $\bar{\omega}$ soit inclus dans Ω et ne contienne pas d'autre point critique de ψ que x.



CAS 1 CAS 2

Figure 3.1

L'application ψ est propre de ω dans $]\psi(x)-\varepsilon,\psi(x)+\varepsilon[$. Nous pouvons donc définir l'application $\psi_\#$ de $\mathcal{D}'(\omega)$ dans $\mathcal{D}'(]\psi(x)-\varepsilon,\psi(x)+\varepsilon[)$ et utiliser les mêmes raisonnements que précédemment. Nous obtenons ainsi que $\psi_\#(v) \in C^0(]\psi(x)-\varepsilon,\psi(x)+\varepsilon[)$. Revenant à la définition intégrale de $\psi_\#$, nous en déduisons (2.9).

Considérons enfin l'application ψ_i de ω_i dans $]\alpha_i,\beta_i[$, où ω_i est homéomorphe à un anneau. D'après P2), cette application est propre. Nous définissons $\psi_{i\#}$ de $\mathcal{D}'(\omega_i)$ dans $\mathcal{D}'(]\alpha_i,\beta_i[)$ et les mêmes raisonnements que précédemment donnent la relation (3.6).

Nous obtenons (3.2) en faisant la somme en i. ■

3.3. Partie II de la démonstration.

Etant donnée une fonction $v \in W_P^q(\Omega,\psi)$ nulle dans un voisinage des séparatrices de ψ, nous allons construire par dualité une distribution $\xi \in E_P^q(\Omega,\psi)$

telle que $\xi \cdot \nabla\psi = v$ et telle que l'égalité ait lieu dans (3.2).

Primitives curvilignes de fonctions régulières.

Nous plongeons $\mathbb{R}^2$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et nous choisissons un vecteur unitaire k orthogonal à $\mathbb{R}^2$.

Pour chaque ouvert ω_i, $1 \le i \le m$, nous introduisons une courbe $\mathcal{C}_i$, de classe C^2, rencontrant une fois et une fois seulement chaque courbe $\Gamma_i(t)$ pour $\alpha_i < t < \beta_i$ (sous les hypothèses (2.1)-(2.4), une telle courbe existe ; prendre par exemple une courbe orthogonale à la famille de courbes $\Gamma_i(t)$).

Ainsi, pour $x \in \omega_i$, x n'étant pas un point critique, il existe un unique point $x' \in \omega_i$ tel que

$$x' \in \mathcal{C}_i \cap \Gamma_i(\psi(x)). \tag{3.7}$$

Les deux points x et x' séparent la courbe $\Gamma_i(\psi(x))$ en deux composantes connexes. Nous noterons $\delta(x)$ celle qui, au voisinage de x', est située du côté où pointe $-k \times \nabla\psi(x')$ (cf. Fig. 3.2).

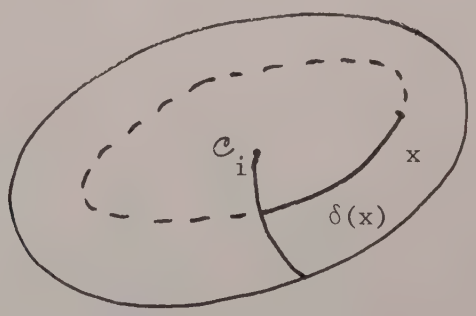


Figure 3.2

Nous introduisons enfin une fonction $\eta \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}\backslash\Sigma)$ qui est constante sur les ensembles $\Gamma_i(t)$ et qui vaut identiquement 1 sur le support de v.

Nous pouvons maintenant définir, pour $\phi \in C^0(\Omega)$,

$$A\phi(x) = \int_{\delta(x)} \left[\eta(x')\phi(x') - \rho_i(\psi(x))^{-1} \cdot \int_{\Gamma_i(\psi(x))} \eta(x'')\phi(x'') \frac{d\sigma''}{|\nabla\psi|} \right] \frac{d\sigma'}{|\nabla\psi|},$$

où i est tel que $x \in \omega_i$.

Lemme 3.1 - Sous les hypothèses (2.1)-(2.4) et avec les notations précédentes,

i) l'opérateur A est continu de $C^0(\Omega)$ dans lui-même et de $C^1(\Omega)$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$;

ii) pour tout $\phi \in C^1(\Omega)$,

$$(3.8) \qquad A(-k\times\nabla\psi\cdot\nabla\phi)(x) = \phi(x)-\phi_i(\psi(x)) \quad \forall x \in \omega_i \cap \mathrm{Supp}\,\eta$$

où $\phi_i(t) = \phi(\mathcal{C}_i \cap \Gamma_i(t))$.

Démonstration :

i) La régularité de $A\phi$ au voisinage d'un point $x \in \Omega$ qui n'est pas critique et qui n'appartient pas aux séparatrices résulte de la régularité de ψ. Par ailleurs, grâce à la fonction η, la fonction $A\phi$ est nulle dans un voisinage des séparatrices. Soit enfin un point x d'extremum relatif. Grâce au lemme de Morse, il est possible de se ramener au cas d'équipotentielles circulaires, et donc de passer en coordonnées polaires via un difféomorphisme F :

$$A\phi(F(x)) = \int_{\theta_i(r)}^{\theta} \left[u-\left(\int_0^{2\pi} b\, d\theta''\right)^{-1} \int_0^{2\pi} bu\, d\theta''\right] b\, d\theta'$$

où $b(x) = |J_F(x)|$, $u(x) = \phi(F(x))$ et θ_i est l'équation de la courbe $\mathcal{C}_i$. Grâce à des développements de Taylor d'ordre 1, il est alors possible de montrer que

$$\lim_{x' \to x} A\phi(x') = 0$$

et

$$|\nabla A\phi(x')| \le C|\nabla\phi(x)| \text{ dans un voisinage de } x,$$

ce qui démontre i).

ii) Posant $\tau = -k \times \dfrac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$, nous avons $-k\times\nabla\psi\cdot\nabla\phi = |\nabla\psi|\dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}$; comme par ailleurs $\eta=1$ sur $\Gamma_i(\psi(x))$ pour $x \in \mathrm{Supp}\, v$, le deuxième terme de $A\phi(x)$ vaut

$$\int_{\Gamma_i(\psi(x))} |\nabla\psi| \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} = 0,$$

et donc

$$A\phi(x) = \int_{\delta(x)} \frac{\partial \phi}{\partial \tau}\, d\sigma = \phi(x) - \phi(x')$$

où x' est défini par (3.7), ce qui donne (3.8). ∎

Définition de la distribution ξ.

Nous définissons la fonction

$$g(x) = \rho_i^{-1}\, (\psi_{i\#}(v))'\Big|_{t=\psi(x)} \quad \text{où } i \text{ est défini par } x \in \omega_i .$$

La proposition 2.2 appliquée avec $P_o \equiv 1$ sur Ω donne

$$W^q_{P_o}(\Omega,\psi) \subset W^1_{P_o}(\Omega,\psi).$$

Pour $\bar{\omega}_i \subset \Omega$, nous avons donc $v \in W^1_{P_o}(\omega_i,\psi)$; utilisant le théorème intégral de Federer, nous en déduisons

$$\int_{\omega_i} |g|\, dx = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\psi_{i\#}(v)'|\, dt < \infty .$$

Pour $\bar{\omega}_i \cap \Gamma \neq \emptyset$, nous raisonnons sur ω_i' avec $\bar{\omega}_i' \subset \omega_i$.

Nous obtenons finalement que $g \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Considérons maintenant la fonction $v\, \dfrac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}$. Au voisinage d'un point-selle, cette fonction est nulle. Au voisinage d'un point d'extremum local, le passage aux coordonnées polaires montre que $\dfrac{1}{|\nabla\psi|} \in L^{2-\varepsilon}$ $(\forall \varepsilon > 0)$. Puisque $v \in L^{2+\varepsilon}(\Omega)$, nous obtenons finalement que $v\, \dfrac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} \in L^1(\Omega)$.

Grâce au lemme 3.1, il est alors possible de définir $T \in (\mathcal{D}'(\Omega))^2$ par

$$\langle T,\phi\rangle = -\int_\Omega g \cdot A(-k\times\nabla\psi\cdot\phi)\, dx - \int_\Omega v\, \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} \cdot \nabla(A(-k\times\nabla\psi\cdot\phi))\, dx$$

$$\forall \phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^2 ;$$

nous définissons alors $\xi \in (\mathcal{D}'(\Omega))^2$ par

$$\xi = T + v\, \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} .$$

D'après la définition de T, nous avons $T\cdot\nabla\psi = 0$, d'où $\xi\cdot\nabla\psi = v$.

Nous allons maintenant montrer que div $\xi = g$. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $<\text{div } \xi,\phi> = -<\xi,\nabla\phi>$ vaut, grâce à (3.8),

$$(3.9) \qquad \int_\Omega g\,\phi\,dx - \sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i} g\,\phi_i(\psi)dx - \sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i} \frac{v}{|\nabla\psi|^2}\nabla\psi\cdot\nabla\phi_i(\psi)dx.$$

Le dernier terme vaut

$$(3.10) \qquad -\sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i} v\,\phi_i'\,dx.$$

D'après le théorème intégral de Federer, l'avant dernier terme de (3.9) vaut

$$(3.11) \qquad -\sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \psi_{i\#}(v)'\,\phi_i\,dt.$$

Puisque $v \in W_P^q(\Omega,\psi)$ et est nul dans un voisinage des séparatrices, nous avons $\psi_{i\#}(v)(\alpha_i) = 0$ pour $\bar{\omega}_i \subset \Omega$ et $\psi_{i\#}(v)(\beta_i) = 0$ pour $1 \le i \le m$. Par ailleurs, puisque $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous avons $\phi_i(\alpha_i) = 0$ pour $\bar{\omega}_i \cap \Gamma \neq \emptyset$. La formule de Green appliquée à (3.11) donne donc

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \psi_{i\#}(v)\phi_i'\,dt,$$

ce qui, compte tenu du théorème intégral de Federer, vaut l'opposé de (3.10). Ainsi l'expression de (3.9) vaut $\int_\Omega g\,\phi\,dx$, d'où div $\xi = g$.

Nous pouvons donc écrire

$$P_i\rho_i^{1-q}|(\psi_{i\#}(v))'|^q = P_i\rho_i|\text{div } \xi| \ ,$$

d'où, puisque div $\xi = g$ est constant sur $\Gamma_i(t)$,

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i\rho_i^{1-q}|\psi_{i\#}(v)'|^q\,dt = \int_{\omega_i} P|\text{div } \xi|^q dx,$$

ce qui entraîne l'égalité dans (3.2). ■

4. - UN PROBLEME AUX LIMITES AVEC DES "QUEER" DERIVEES

Considérons un équilibre MHD bidimensionnel (cf. Introduction) constitué d'une cavité $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$, d'un flux ψ de classe C^∞ sur Ω_o vérifiant (2.1)-(2.5) sur l'ensemble Ω occupé par le plasma, d'une pression P sur Ω, vérifiant (2.6)-(2.7) avec P_i (défini par $P(x) = P_i(\psi(x))$ de classe C^2.

Nous considérons des déplacements ξ tels que $v = \xi \cdot \nabla\psi \in L^2(\Omega_o)$.

Choix de l'espace fonctionnel

Si l'expression (0.12) est négative pour un certain $v \in L^2(\Omega_o)$, alors nécessairement :

$$\int_{\Omega_o} |\nabla v|^2 \, dx < \infty \quad , \tag{4.1}$$

$$J(v) < \infty \quad , \tag{4.2}$$

ce qui entraîne que $v \in H_o^1(\Omega_o)$ (espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω_o avec trace nulle sur Γ_o), d'où, grâce à l'injection de Sobolev,

$$v \in L^q(\Omega) \text{ pour tout réel } q \quad 1 \le q < \infty \, .$$

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème 3.1 (avec q = 2), et (4.2) entraîne que $v \in W_P^2(\Omega;\psi)$.

Nous pouvons donc associer à (0.12) l'espace

$$V = \{v \in H_o^1(\Omega_o) \quad \text{t.q.} \quad v|_\Omega \in W_P^2(\Omega;\psi)\} \, .$$

Muni du produit scalaire

$$((v_1,v_2)) = \int_{\Omega_o} \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 \, dx + \gamma \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i \rho_i^{-1} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} v_1 \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right) \times \tag{4.3}$$

$$\times \left(\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} v_2 \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right) dt,$$

l'espace V est un espace de Hilbert (cf. th. 2.1).

Un problème variationnel

Nous déduisons de (0.12) et du th. 3.1 :

une condition suffisante de stabilité (nécessaire et suffisante si ψ n'a pas de point-selle dans Ω) est que

$$(4.4) \qquad 0 \le \operatorname*{Inf}_{v\in V} \{ \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i} P_i''(\psi)\, v^2 dx \}.$$

Nous séparons maintenant les parties négatives et positives de P_i'' :

$$P_{i+}''(z) = \max(P_i''(z),0), \quad P_{i-}''(z) = \max(-P_i''(z),0) .$$

Le critère (4.4) peut ainsi s'écrire $R(v) \ge 1$ avec

$$(4.5) \qquad R(v) = \frac{\frac{1}{2}\|v\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \int_{\omega_i} P_{i-}''(\psi)\, v^2 dx}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \int_{\omega_i} P_{i+}''(\psi)\, v^2 dx}$$

Nous reconnaissons là un quotient de Rayleigh, dont la valeur minimale est donnée par la première valeur propre du problème variationnel associé :

trouver $(\mu,u) \in \mathbb{R} \times V$, $u \not\equiv 0$, tel que, pour tout $v \in V$,

$$(4.6) \qquad ((u,v)) + \sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i} P_{i-}''(\psi)\, uv\, dx = \mu \sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i} P_{i+}''(\psi)\, uv\, dx.$$

Les valeurs propres de (4.6) sont réelles et positives ; grâce à la compacité de l'injection de V dans $L^2(\Omega_o)$, elles forment une suite qui tend vers $+\infty$. Il existe ainsi une plus petite valeur $\mu_1 \ge 0$; elle est égale à la valeur minimale de R(u) (défini par (4.5)) sur V.

Ainsi $\mu_1 \ge 1$ est une condition suffisante de stabilité (nécessaire et suffisante si ψ n'a pas de point-selle dans Ω).

Un problème aux limites avec des "queer" dérivés

Soit $(\mu,u) \in \mathbb{R} \times V$ une solution régulière de (4.6) dans le sens suivant :

i) pour tout i, $u|_{\omega_i}$ admet un prolongement régulier dans $\bar{\omega}_i$,

ii) $u|_{\Omega} \in C^{\eta}(\Omega)$ pour $\eta > 0$.

Considérons $v \in \mathcal{D}(\omega_i)$; l'emploi de la formule de Green sur ω_i donne

$$\int_{\omega_i} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_{\omega_i} \Delta u \cdot v \, dx,$$

et son emploi sur $\mathbb{R}$ donne (puisque $P_i(0) = 0$)

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} P_i \rho_i^{-1} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right)\left(\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_{i(t)}} v \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right) dt =$$

$$= -\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{d}{dt}\left(P_i \rho_i^{-1} \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_{i(t)}} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right) \cdot \int_{\Gamma_{i(t)}} v \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \, dt$$

ce qui est égal, grâce au théorème intégral de Federer, à

$$-\int_{\omega_i} \frac{d}{dt}\left(P_i \rho_i^{-1} \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right)\Big|_{t=\psi(x)} \cdot v(x) \, dx.$$

Puisque v est arbitraire, nous trouvons que u vérifie le problème aux limites avec des "queer" dérivées ci-dessous.

$$(4.7)_i \qquad -\Delta u - \gamma \frac{d}{dt}\left[P_i \rho_i^{-1} \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right]_{t=\psi(x)} + P''_{i_-}(\psi)u = \mu P''_{i_+}(\psi)u \text{ dans } \omega_i$$

D'autre part, prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega^c)$, nous obtenons

$$(4.8) \qquad \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega^c.$$

Considérons maintenant $v \in \mathcal{D}(\Omega_o)$. Multiplions $(4.7)_i$ (resp. (4.8)) par v, intégrons sur ω_i (resp. Ω^c), utilisons la formule de Green et faisons la différence avec (4.6). Nous obtenons, en notant $< \frac{\partial u}{\partial \nu} >$ le saut de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$,

$$-\int_\Sigma < \frac{\partial u}{\partial \nu} > \, v \, d\sigma - \int_\Gamma < \frac{\partial u}{\partial \nu} > \, v \, d\sigma = 0.$$

Puisque $v \in \mathcal{D}(\Omega_o)$ est quelconque sur Σ et sur Γ, nous en déduisons que

$$(4.9) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ est continu à travers } \Sigma \text{ et } \Gamma.$$

Par ailleurs, la proposition 2.1 donne (grâce à ii))

$$(4.10) \qquad u(x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega \text{ t.q. } \nabla\psi(x) = 0.$$

Nous avons donc obtenu que u est solution du problème aux limites avec des "queer" dérivées suivant :

$$(4.11) \quad \begin{cases} -\Delta u - \gamma \dfrac{d}{dt}\left[P_i \rho_i^{-1} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right]_{t=\psi(x)} + P''_{i-}(\psi)u = \mu\, P''_{i+}(\psi)\, u \\ \qquad \text{dans } \omega_i\ ,\ 1 \le i \le m, \\ u(x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega \text{ t.q. } \nabla\psi(x) = 0, \\ u \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial n} \text{ continu à travers } \Sigma \text{ et } \Gamma, \\ \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega^c, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_o. \end{cases}$$

Remarque 4.1 : Dans [7], Grad-Hu-Stevens ont montré qu'une famille adiabatique de plasmas à l'équilibre peut être modélisée par la Q.D.E. (queer differential equation)

$$(4.12) \qquad -\Delta\psi = \gamma\mu\, (\psi'(V))^{\gamma-2}\psi''(V)$$

et que l'équation linéarisée correspondante est

$$(4.13) \qquad (-\Delta - \ddot{P})\frac{\partial\psi}{\partial t} - \gamma\, (\mu\psi'_t)' + \gamma\psi_t(\mu\psi'')'/\psi' = 0$$

où $(') = \frac{d}{dV}$, $(\dot{}) = \frac{d}{d\psi}$, $\psi_t = \partial\psi(v,t)/\partial t = \displaystyle\int \partial\psi(x,y,t)/\partial t \ \frac{d\sigma}{|\nabla v|}$.
En n'utilisant que des dérivées par rapport à ψ, l'équation (4.13) devient

$$(4.14) \qquad \mathcal{A}\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-\Delta - \ddot{P})\frac{\partial\psi}{\partial t} - \gamma \frac{d}{d\psi}\left(P\psi' \frac{d}{d\psi}\int \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\right) = 0.$$

Il est particulièrement intéressant de noter que l'opérateur $\mathcal{A}$ ci-dessus coïncide avec celui qui intervient dans l'équation (4.11). Cela signifie en particulier que les changements de 2-d stabilité (au sens de Bernstein) doivent coïncider avec des bifurcations des solutions de (4.12) paramétrées par μ.

Signalons par ailleurs que les Q.D.E. constituent un sujet actuel de recherche (cf. [12][18]).

Remarque 4.2 : L'approximation numérique du problème (4.6) peut être faite par la méthode des éléments finis d'ordre 1, le calcul de la première valeur propre du problème approché pouvant être traité par la méthode des puissances itérées . Remarquons que la partie non locale de (4.3) rend la matrice du système linéaire relativement pleine. Du fait d'une erreur dans les coefficients du problème variationnel, les résultats numériques présentés dans [16] ne sont pas significatifs, mais l'étude de faisabilité de la méthode (place mémoire et temps calcul) reste positive. De nouveaux essais numériques sont en cours.

Remarque 4.3 : Dans le cas où ψ a des point-selle dans Ω, il est possible d'obtenir des conditions nécessaires de stabilité. Nous introduisons V_ε, l'ensemble des fonctions de V qui sont nulles dans un voisinage tubulaire de rayon ε autour de Σ, et $\mu_{1\varepsilon}$ la première valeur propre de (4.6) en remplaçant V par V_ε. Nous avons bien sûr $\mu_1 \leq \mu_{1\varepsilon}$. Si pour ε_o nous avons $\mu_{1\varepsilon_o} < 1$, alors l'équilibre est instable. La question de la convergence de $\mu_{1\varepsilon}$ vers μ_1 pour $\varepsilon \to 0$ est actuellement ouverte.

REFERENCES

[1] R.A. ADAMS, Sobolev Spaces, Academic Press, New-York, 1975.

[2] G. BATEMAN, MHD Instabilities, The MIT Press, Cambridge (Massachussetts) 1978.

[3] I.B. BERNSTEIN, E.A. FRIEMAN, M.D. KRUSKAL, R.M. KULSRUD, An energy principle for hydromagnetic stability problems, Proc. Royal Soc. A 244, 17-40 (1958).

[4] J. DESCLOUX, G. GEYMONAT, Sur le spectre essentiel d'un opérateur relatif à la stabilité d'un plasma en géométrie toroïdale, C.R. Acad. Sc. Paris, A. 290, 795-797 (1980).

[5] H. FEDERER, Geometric measure theory, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1969.

[6] H. GRAD, Magnetofluid-dynamic spectrum and law shear stability, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 70, 3277-3281 (1973).

[7] H. GRAD, P.N. HU, D.C. STEVENS, Adiabatic evolution of plasma equilibrium, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 72, 3789-3793 (1975).

[8] R.C. GRIMM, J.M. GREENE, J.L. JOHNSON, in Methods in Computational Physics, J. KILLEEN, ed., 16, 253-280 (New-York : Academic Press, 1976).

[9] R. GRUBER, Finite hybrid elements to compute the ideal magnetohydrodynamic spectrum of an axisymmetric plasma, J. of Comp. Phys. 26, 379-389 (1978).

[10] C. MERCIER, The magnetohydrodynamic approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configurations, Publication of EURATOM CEA, Luxembourg 1974.

[11] J. MILNOR, Morse theory, Princeton University Press, 1963.

[12] J. MOSSINO, R. TEMAM, Directional derivative of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in plasma physics, Duke Math. J., 48, 475-495 (81).

[13] E. REBHAN, A. SALAT, Axisymmetric MHD stability of sharp-boundary Tokamaks, Nuclear Fusion, 17, 251-260 (1977).

[14] C.A. ROGERS, Hausdorff Measures, Cambridge University Press, 1970.

[15] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, Paris 1966.

[16] M. SERMANGE, Etude numérique des bifurcations et de la stabilité des solutions des équations de GRAD-SHAFRANOV, in Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, R. GLOWINSKI, J.L. LIONS ed., North-Holland Publ. Company, INRIA 1980.

[17] R. TEMAM, A nonlinear eigenvalue problem : the shape of equilibrium of a confined plasma, Arch. Rat. Mech. Anal. 60, 51-73 (1975).

[18] G. VIGFUSSON, The queer differential equations for adiabatic compression of plasma, Bull. Ann. Math. Soc., 1, 778-781 (1979).

CHAPITRE VI

ETUDE NUMERIQUE DES BIFURCATIONS ET DE LA STABILITE DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DE GRAD-SHAFRANOV.*

Michel SERMANGE
IRIA-LABORIA
Domaine de Voluceau
78150 LE CHESNAY (France)

La configuration d'équilibre d'un plasma confiné dans une machine du type Tokamak est modélisée par une équation elliptique non linéaire et non continûment différentiable. On étudie ici des méthodes numériques nouvelles pour déterminer les branches de solutions de tels problèmes ainsi que leurs bifurcations (cf. [12]*). D'autre part, la stabilité de ces équilibres (par rapport à des perturbations axisymétriques) est déterminée par un problème aux valeurs propres non local (faisant intervenir des intégrales curvilignes le long des lignes magnétiques). Le problème approché est obtenu par une double discrétisation : des éléments finis et une famille de lignes magnétiques. Les résultats numériques présentés mettent en évidence des bifurcations et des changements de stabilité. Signalons qu'une étude théorique de l'existence de bifurcation a fait l'objet de* [13] .

1. LES EQUATIONS

1.1. Equations d'équilibre.

Les équations standard d'équilibre en M H D sont

$$(1.1) \qquad \begin{cases} rot\ B \times B = grad\ p\ , \\ div\ B = 0\ , \end{cases}$$

où B est le champ magnétique et p la pression.

Dans les cas d'équilibres cylindriques indépendants de z ou d'équilibres toriques axisymétriques, il est possible de réduire le système (1.1) à une seule équation portant sur le flux poloïdal (Ψ) ; c'est l'équation de GRAD-SHAFRANOV, qui s'écrit [1]

$$(1.2) \qquad -\Delta\Psi = p'(\Psi)$$

---

[1] Par commodité, on écrit seulement les expressions associées au cas cylindrique.

* Computing Methods in Applied Sciences and Engineering
R. Glowinski, J.L. Lions (editors), North Holland Publishing Company, INRIA 1980.

où $\Delta\Psi = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2}$ et $p(\Psi)$ représente la somme de la pression et de $\frac{1}{2} B_z(\Psi)^2$.

Le plasma étant maintenant considéré à frontière libre dans un domaine de section Ω, il est possible de formuler le problème de la façon suivante (cf. R. TEMAM [16]).

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, p une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée, I une constante réelle positive donnée, on cherche $\Psi \in H^1(\Omega)$ (espace de Sobolev d'ordre 1 sur $L^2(\Omega)$) tel que

$$(1.3) \qquad \begin{cases} -\Delta\Psi = p'(\Psi) & p.p \text{ dans } \Omega \\ \Psi = cte \text{ (inconnue) } p.p. \text{ sur } \Gamma(=\partial\Omega), \\ -\int_\Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, d\sigma = I. \end{cases}$$

La fonction p est supposée vérifier les conditions suivantes

(1.4) $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1 telle que

$$p(z) = o \quad \forall\, z \leq o \quad \text{et} \quad p'(o) = o,$$

(1.5) p est convexe

(1.6) $\exists\ \alpha > 1$ tel que $\lim_{z \to \infty} \frac{p'(z)}{z^\alpha} = o,$

(1.7) $\lim_{z \to \infty} mes(\Omega)\, p'(z) > I.$

Lorsque la solution Ψ est connue, la région Ω_p occupée par le plasma s'en déduit par (cf. Figure 1)

$$\Omega_p = \{x \in \Omega \mid \Psi(x) > o\}.$$

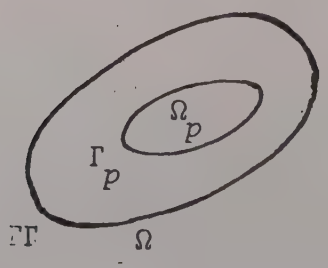


Figure 1.

L'existence de solution Ψ pour le problème (1.3) a d'abord été démontrée par R. TEMAM [16], puis J.P. PUEL [10], dans le cas modèle où $p(z) = \frac{1}{2}\lambda(z_+)^2$, $\lambda > o$ quelconque ; ce résultat a été étendu par H. BERESTYCKI et H. BREZIS [2] au cas général où p vérifie (1.4)-(1.7).

L'unicité de solution a été démontrée (cf. [2]) dans le cas où p' est strictement monotone et k -lipschitzienne avec k suffisamment petit.

1.2. Solutions variationnelles et solutions linéairement stables.

On introduit la variété K,

$$K = \left\{ \Psi \in H^1(\Omega) \mid \Psi = cte \text{ (quelconque) } p.p. \text{ sur } \Gamma, \int_\Omega p'(\Psi)\, dx = I \right\},$$

et on définit sur cette variété une fonctionnelle e par

$$e(\Psi) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \Psi|^2 \, dx - \int_\Omega p(\Psi)\, dx + I\, \Psi(\Gamma)$$

où $\Psi(\Gamma)$ désigne la valeur (constante) de Ψ sur Γ.

Les points critiques de e sur K sont les solutions de (1.3) (cf. [2] [16]). On appelera solution variationnelle de (1.3) les solutions réalisant le minimum de e sur K.

On trouvera dans l'ouvrage récent de G. BATEMAN [1] les références de plusieurs méthodes pour déterminer la stabilité linéaire d'équilibres quelconques de la M H D. L'originalité du travail présenté ici (cf. [14]) est la relative simplicité des expressions, qui a été obtenue en se plaçant dans le cadre particulier de la dimension 2 (y compris pour les perturbations).

En effet, dans le cas d'un équilibre cylindrique indépendant de z (rep. axisymétrique) on peut étudier un type particulier de stabilité : la stabilité par rapport à des déplacements indépendants de z (resp. axisymétrique). Ce cadre a été étudié par E. REBHAN et A. SALAT [11]. Si on ajoute encore deux conditions, à savoir que la composante verticale (resp. toroïdale) du champ magnétique à l'équilibre est partout nulle et que les déplacements admissibles ont des composantes verticales (resp. toroïdales) nulles, on est ramené au problème en dimension 2 suivant .

Avec l'espace des déplacements admissibles

$$E = \left\{ u \in (L^2(\Omega))^2 \mid u.\nabla \Psi \in H^1_0(\Omega) , \quad div\, u|_{\Omega_p} \in L^2(\Omega_p) \right\},$$

et la fonctionnelle (déduite de J. BERNSTEIN, E.A. FRIEDMAN, N. KRUSKAL, R.M. KULSRU [3])

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u^1|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega p''(\Psi)|u^1|^2 + \frac{\gamma}{2} \int_\Omega p(\Psi)|div\ u|^2 \, dx$$

où $u^1 = u.\nabla\Psi$

et $\gamma = 5/3$ est la constante de chaleur spécifique,

l'équilibre (p,Ψ) est dit linéairement stable (pour la dim.2) si et seulement si

$$Inf \quad J(u) \geq 0 \ ;$$
$$u \in E$$
$$\int_\Omega u^2 \, dx = 1$$

l'équilibre est dit linéairement instable sinon, c'est-à-dire

$$Inf \quad J(u) < o.$$
$$u \in E$$
$$\int_\Omega u^2 \, dx = 1$$

2. DETERMINATION DES BRANCHES DE SOLUTIONS ET DES BIFURCATIONS.

2.1. Deux algorithmes généraux.

Le premier algorithme que nous présentons concerne la minimisation de la différence de deux fonctions convexes.

Soient V, H deux espaces de Banach ; on suppose que V s'injecte de façon compacte dans H et qu'il est dense dans H. On s'intéresse à la minimisation de fonctionnelles de la forme

$$e(v) = \frac{1}{2} \ a(v,v) - f(v)$$

où a est une forme bilinéaire continue coercive sur V, f est une fonctionnelle convexe et C^1 sur H, e est minorée sur V et $\lim_{||v||_V \to \infty} e(v) = +\infty$.

Les solutions du problème de minimisation

(2.1) $\quad u \in V$ tel que $e(u) \leq e(v) \quad \forall\, v \in V$

sont aussi des solutions de l'équation d'Euler

(2.2) $\quad u \in V$ tel que $a(u,v) = f'(u).v \quad \forall\, v \in V.$

On définit un algorithme par la relation de récurrence

(2.3) $\quad u^{n+1} \in V$ tel que $a(u^{n+1},v) = f'(u^n).v \quad \forall\, v \in V.$

On démontre, généralisant ainsi un résultat de H. BERESTYCKY et H. BREZIS (cf. th.2.

Théorème 2.1 . Sous les hypothèses précédentes, pour tout $u_o \in V$, il existe une sou suite $u^{n'}$ de la suite définie par (2.3) qui converge fortement dans H vers une sol tion du problème (2.2). De plus, toute sous-suite convergente de (u^n) converge ver une solution de (2.2).

Principe de la démonstration. Grâce à la convexité de f, on obtient directement que $e(u^{n+1}) \leq e(u^n) \quad \forall\, n \geq 1$. La suite $e(u^n)$ est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. On en déduit facilement le théorème.

On remarque que si le problème (2.2) admet au plus une solution, alors toute la sui définie par (2.3) converge vers cette solution.

Le deuxième algorithme concerne la détermination des points fixes d'opérateurs non contractants et non continûment différentiables.

Soient V un espace de Banach réel et T une application continue de V dans lui-mêm dont on cherche les points fixes.

On se donne un réel positif α et on construit par récurrence une suite (u^n) d'él ments de V. On part d'un élément $u^o \in V$ quelconque et, l'élément u^n étant connu, détermine u^{n+1} par trois pas intermédiaires :

$$(2.4)_\alpha \qquad \begin{cases} u^{n+\frac{1}{3}} = T(u^n), \\ u^{n+\frac{2}{3}} = T(u^{n+\frac{1}{3}}), \\ u^{n+1} = (1-\alpha)\, u^n + 2\alpha\, u^{n+\frac{1}{3}} - \alpha\, u^{n+\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

La continuité de T entraîne le résultat de consistance suivant. S'il existe u^* tel que, pour $n \to \infty$, $u^n \to u^*$ et $u^{n+\frac{1}{3}} \longrightarrow u^*$ dans V, alors u^* est un point fi

de T . Par contre, la seule hypothèse : $u^n \to u^*$ dans V ne permet pas en général de conclure que u^* est un point fixe de T.

On démontre le résultat de convergence suivant :

Théorème 2.1. Supposons que

i) $u^* \in V$ est un point fixe de T ;

ii) T est Fréchet-différentiable en u^*, de dérivée notée A ;

iii) le complexifié de A est compact, de valeurs propres réelles et différentes de 1 ;

Alors, pour tout α , $0 < \alpha < \alpha^*$, α^* assez petit, il existe un voisinage V_α de u^* tel que, si $u^o \in V_\alpha$ et si (u^n) est défini par $(2.4)_\alpha$,

$$u^{n+\frac{i}{3}} \longrightarrow u^* \quad \text{dans } V, \qquad i = 0, 1, 2.$$

Principe de la démonstration. On remarque que la suite u^n est obtenue par itération de l'opérateur

$$U_\alpha = (1-\alpha)\, I + 2\,\alpha\, T - \alpha\, T^2.$$

On vérifie que, pour α plus petit que α^* donné par

(2.5) $$\alpha^* = 2/b^2 \quad \text{où} \quad b = \sup_{y \in Sp(A)} |1-y|,$$

le rayon spectral de l'opérateur U_α est strictement plus petit que 1. On en déduit la convergence locale de la suite (u^n) par application d'un théorème de J.W. KITCHEN [8].

L'algorithme $(2.4)_\alpha$ convient principalement au calcul d'une branche de solutions passant par une solution connue. Plus précisément, soit à calculer une branche de solutions de

$$T(\lambda,u) = u \qquad \underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}$$

passant par une solution (λ^*,u^*) donnée.

On choisit une subdivision croissante (resp. décroissante) $(\lambda_i)_{i=1}^N$ de $[\lambda^*,\bar{\lambda}]$ (resp. $[\underline{\lambda}\ ,\lambda^*]$ et on calcule les solutions (λ_i,u_i) de proche en proche : supposant (λ_i,u_i) calculé, on évalue α^*_{i+1} grâce à α^*_i (donné par (2.5)) et on calcule la suite $(u^n_{i+1})_n$ par $(2.4)_\alpha$ $(\alpha < \alpha^*_{i+1})$ avec l'initialisation $u^o_{i+1} = u_i$.

2.2. Application aux équations de GRAD-SHAFRANOV avec frontière libre.

On cherche à déterminer les solutions de

$$(2.6)\qquad \begin{cases} -\Delta u = p'(u) \text{ dans } \Omega, \\ u = cte(inconnue) \text{ sur } \Gamma \\ -\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = I\ , \end{cases}$$

avec $p = \lambda\, p_o$, où p_o est donnée et λ est un paramètre que l'on fera varier. On ne s'intéressera qu'aux solutions u de (2.6) vérifiant aussi

$$(2.7)\qquad mes\left\{x \in \Omega \mid u(x) = o\right\} = o\ ;$$

on pourra alors introduire la première valeur propre ν_1 du problème linéarisé

$$(2.8)\qquad \begin{cases} -\Delta \varphi = \nu\, p''(u)\varphi \quad p.p. \text{ dans } \Omega\ , \\ \varphi = cte(inconnue)\ p.p. \text{ sur } \Gamma, \\ \displaystyle\int_\Omega p''(u)\varphi\ dx = o\ , \end{cases}$$

où $\varphi \in H^1(\Omega)$ et $\varphi \not\equiv o$.

On déduit de l'étude précédente deux algorithmes pour déterminer des branches de solutions de (2.6).

Premier algorithme

$$(2.9)\qquad \begin{cases} -\Delta u^{n+1} = \lambda\, p_o'(u^n) \text{ dans } \Omega, \\ u^{n+1} = cte(inconnue) \text{ sur } \Gamma, \\ \displaystyle\int_\Omega \lambda\, p_o'(u^{n+1})\ dx = I. \end{cases}$$

Deuxième algorithme

$$(2.10)\qquad \begin{cases} -\Delta u^{n+1/3} = \lambda\, p_o'(u^n) \text{ dans } \Omega, \\ u^{n+1/3} = cte\ (inconnue) \text{ sur } \Gamma, \\ \displaystyle\int_\Omega \lambda\, p_o'(u^{n+1/3})\ dx = I\ ; \end{cases}$$

$$(2.11)\qquad \begin{cases} -\Delta u^{n+2/3} = \lambda\, p_o'(u^{n+1/3}) \text{ dans } \Omega\,, \\ u^{n+2/3} = cte(inconnue) \text{ sur } \Gamma, \\ \displaystyle\int_\Omega \lambda\, p_o'(u^{n+2/3})\, dx = I, \end{cases}$$

$$(2.12)\qquad u^{n+1} = (1-\alpha)\, u^n + 2\alpha\, u^{n+1/3} - \alpha\, u^{n+2/3}\,.$$

Le problème (2.9) (et donc aussi les problèmes (2.10) et (2.11)) admettent une unique solution dans $H^2(\Omega)$. En effet, posant

$$u^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} + C^{n+1}\,,\quad \tilde{u}^{n+1} \in H_0^1(\Omega),\ C^{n+1} \in \mathbb{R}\,,$$

la fonction $\tilde{u}^{n+1}$ est l'unique solution d'un problème de Dirichlet usuel et la constante C^{n+1} est l'unique solution du problème non linéaire monotone

$$(2.13)\qquad \int_\Omega \lambda\, p_o'(\tilde{u}^{n+1} + C^{n+1})\, dx = I.$$

On a le résultat de convergence suivant, dû à H.BERESTYCKI et H. BREZIS [2] et du même type que le th. 2.1 :

Théorème 2.3. Supposons que p vérifie (1.4)-(1.7) ; quelque soit $u^o \in H^1(\Omega)$, il existe une sous-suite de (u^n) définie par (2.9) qui converge fortement dans $H^1(\Omega)$ vers une solution du problème (2.6). De plus, toute sous-suite convergente de (u^n) converge vers une solution de (2.6).

D'autre part, par application du théorème 2.2, on peut démontrer

Théorème 2.4. Supposons que p vérifie (1.4)-(1.7), que p' est dérivable en tout point $z > o$ et que $p'(z) > o \quad \forall\, z > o$.

Soit u^* une solution de (2.6) vérifiant en outre (2.7) et supposons que 1 n'est pas valeur propre de (2.8). Alors

i) pour tout α, $o < \alpha < \alpha^*$, α^* assez petit, il existe un voisinage V_α de u dans $H^2(\Omega)$ tel que, si $u^o \in V_\alpha$ et (u^n) est défini par (2.12), pour $n \to \infty$,

$$u^{n+i/3} \longrightarrow u^* \text{ dans } H^2(\Omega),\quad i = 0,\ 1,\ 2$$

ii) si de plus u^* est une solution variationnelle [1], il existe un voisinage V de u^* dans $H^2(\Omega)$ tel que, si $u^o \in V$ et (u^n) est défini par (2.9) alors, pour $n \to \infty$,

$$u^n \longrightarrow u \text{ dans } H^2(\Omega).$$

2.3 Quelques remarques sur la mise en oeuvre des algorithmes.

Les algorithmes précédents sont appliqués après discrétisation du problème (2.6) par la méthode des éléments finis d'ordre 1. On a vérifié que le problème discrétisé possède toujours une solution.

Pour chaque étape d'un des algorithmes, le calcul du second membre requiert l'évaluation de

(2.14) $$\int_T p'(u^n)\, w_i\, dx = \int_{T \cap u^n > o} p'(u^n)\, w_i\, dx$$

où T est un triangle et w_i une fonction de base . Puisque la fonction p' n'est pas régulière en zéro, l'approximation de l'intégrale (2.14) est effectuée sur l'expression de droite, c'est-à-dire qu'on calcule les surfaces exactes des ensembles $\{ x \in T \mid u^n(x) > o \}$ (cf. Figure 2).

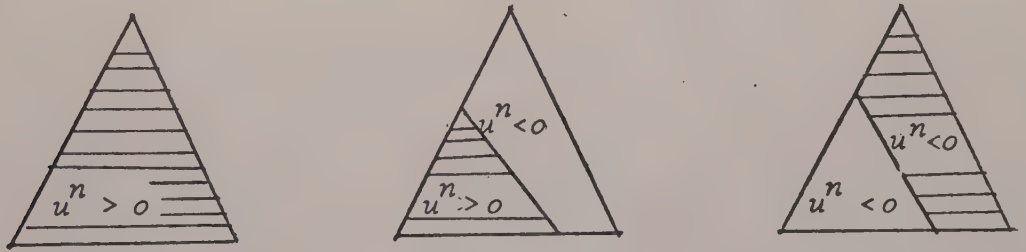


Figure 2.

Les systèmes linéaires (2.9), (2.10) où (2.11) sont résolus par la méthode itérative de relaxation avec paramètre optimal.

L'équation (2.13) est résolue par la méthode de Newton.

Le calcul de ν_i est effectué par la méthode des puissances itérées.
Quant au choix des algorithmes, on applique de préférence le premier, plus performant, le second n'étant utilisé que lorsqu'on prédit une valeur propre $\nu_1 < 1$,

---

[1] ou , plus généralement, si $\nu_1 > 1$.

auquel cas le premier algorithme peut ne pas converger.

Enfin, lorsque le domaine Ω possède un axe de symétrie, le problème (2.6) possède au moins une solution symétrique ; elle peut être déterminée par application de l'algorithme (2.9) sur le demi-ouvert avec condition de Neumann sur l'axe de symétrie.

Remarque 2.1 . On trouvera d'autres méthodes numériques pour déterminer les solutions d'un problème très voisin de (2.6) dans [6] et [9].

2.4. Une remarque sur la détermination numérique des points de bifurcation.

Lors du calcul des branches de solutions, il est possible de reconnaître un point de bifurcation grâce à la condition suffisante suivante.

Soient $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}_+$ et u une application continue de $\mathcal{I}$ dans $H^2(\Omega)$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathcal{I}$, $(\lambda, u(\lambda))$ soit solution de (2.6) et (2.7). On peut définir $\nu_1(\lambda)$ par (2.8).

Supposons qu'il existe $\lambda^* \in \mathcal{I}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

i) $\nu_1(\lambda^*) = 1$

ii) $\nu_1(\lambda) > 1$ pour $\lambda^* - \varepsilon < \lambda < \lambda^*$ (resp. $\nu_1(\lambda) < 1$)

iii) $\nu_1(\lambda) < 1$ pour $\lambda^* < \lambda < \lambda^* + \varepsilon$ (resp. $\nu_1(\lambda) > 1$) ;

alors $(\lambda^*, u(\lambda^*))$ est un point de bifurcation de (2.6) dans $\mathcal{I} \times H^2(\Omega)$ par rapport à la branche $\{(\lambda, u(\lambda)),\ \lambda \in \mathcal{I}\}$.

Principe de la démonstration . Supposant qu'il n'y a pas de bifurcation, on montre que le degré topologique de LERAY-SCHAUDER de fonctionnelles homotopes bien choisies n'est pas constant.

Rappelons enfin qu'il a été démontré par R. TEMAM, puis T. GALLOUET [5] , que la condition i) ci-dessus est une condition nécessaire de bifurcation.

3. DETERMINATION NUMERIQUE DE LA STABILITE LINEAIRE.(*)

3.1. Un problème de valeur propre.

Nous allons d'abord montrer que le calcul de la stabilité linéaire (cf. § 1), c'est-à-dire la recherche du signe de l'infimum de $J(\vec{u})$,

(*) Certaines expressions mathématiques de cette partie ont été corrigées conformément à l'article ultérieur "Modélisation de la stabilité magnétohydrodynamique bidimensionnelle par un problème aux limites généralisé ".

$$J(\vec{u}) = J_o(\vec{u}) + \gamma\, J_1(\vec{u})$$

où

$$J_o(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u^1|^2\, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} p''(\Psi)|u^1|^2\, dx\,, \quad u^1 = \vec{u}.\vec{\nabla}\Psi,$$

$$J_1(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} p(\Psi)|div\ \vec{u}|^2\, dx\,,$$

sur l'espace

$$E = \left\{ \vec{u} \in (L^2(\Omega))^2 \,\middle|\, \vec{u}.\vec{\nabla}\Psi \in H_0^1(\Omega),\ div\ \vec{u}|_{\Omega_p} \in L^2(\Omega_p) \right\},$$

peut être ramené au problème de la détermination de la plus grande valeur propre d'un opérateur compact, ce qui est un problème classique.

Grâce au théorème de Federer, on a

$$J_1(\vec{u}) = \int_o^\infty p(t) \left(\int_{\Psi=t} |div\ \vec{u}|^2\ \frac{d\sigma}{|\nabla\Psi|} \right) dt,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de longueur sur la courbe $\Psi = t$.

Soient $(\vec{\tau}, \vec{n})$ les vecteurs tangents et perpendiculaires à la courbe $\Psi = t$ passant par un point x quelconque ; on note

$$\vec{u}(x) = u_{//}(x)\vec{\tau}(x) + u_\perp(x)\ \vec{n}(x).$$

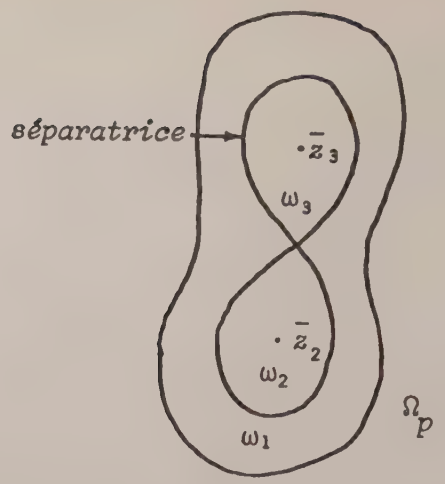
Dans ce système de coordonnées, la divergence est donnée par l'expression

$$div\ \vec{u} = div(u_\perp n) + div(u_{//}\tau)$$

d'où

$$J_1(\vec{u}) = \int_o^\infty p(t) \left[\int_{\Psi=t} \left(div(u_\perp n) + div(u_{//}\tau) \right)^2 \frac{d\sigma}{|\nabla\Psi|} \right] dt$$

Minimisant cette expression par rapport à $u_{//}$, on obtient une fonctionnelle J_2 qui ne dépend que de $u^1 = u_\perp\, |\nabla\Psi|$.



On appelle séparatrice une ligne $\Psi(x) = t$ possédant au moins un point double (cf. Figure 3). Soient $\omega_i, i=1,\ldots,N,$ les composantes connexes de Ω_p privé des séparatrices. On note $\underline{z_i}$ (resp. $\overline{z_i}$) le minimum (resp. le maximum) de Ψ sur $\overline{\omega_i}$. On note $\Gamma_i(t)$ la ligne $\Psi(x) = t$ pour $x \in \omega_i$; c'est une ligne fermée sans point double.

Notant, pour $i = 1,\ldots, N$ et $\underline{z_i} \le t \le \overline{z_i}$

$$q_i(t) = p(t)\left(\int_{\Gamma_i(t)} \frac{d\sigma}{|\nabla\Psi|}\right)^{-1}, \tag{3.1}$$

$$\beta_i v(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_i(t)} v\,\frac{d\sigma}{|\nabla\Psi|}\right) \tag{3.2}$$

on a

$$b(v_1, v_2) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\underline{z_i}}^{\overline{z_i}} q_i(t)\,\beta_i v_1(t)\,\beta_i v_2(t)\,dt, \tag{3.3}$$

et finalement

$$J_2(v) = b(v, v).$$

On s'est donc ramené (formellement dans le travail actuel) au problème de minimisation de $J_o(v) + \gamma J_2(v)$ sur un espace F de fonctions scalaires, où

$$F = \left\{ v \in H_0^1(\Omega)\ ,\ \sum_{i=1}^{N} \int_{\underline{z_i}}^{\overline{z_i}} q_i(t)\,(\beta_i v(t))^2\,dt < \infty \right\}.$$

On démontre que cet espace F, muni du produit scalaire

$$\int_\Omega \nabla v_1 . \nabla v_2\,dx + b(v_1, v_2) \tag{3.4}$$

est un espace de Hilbert.

Puisque l'opérateur A, qui à $u \in F$ associe l'unique solution $v \in F$ de

$$\int_\Omega \nabla v . \nabla w \, dx + \gamma \, b(v, w) = \int_{\Omega_p} p''(\Psi) \, u \, w \, dx \qquad \forall \, w \in F,$$

est un opérateur compact, on en déduit qu'il existe une plus petite valeur propre μ_1 de : $u \in F$ tel que

$$(3.5) \qquad \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \gamma \, b(u,v) = \mu \int_{\Omega_p} p''(\Psi) \, u \, v \, dx \qquad \forall \, v \in F.$$

La stabilité linéaire est liée à μ_1 par :

l'équilibre est linéairement stable $\Leftrightarrow$ $\mu_1 \geq 1$
l'équilibre est linéairement instable $\Leftrightarrow$ $\mu_1 < 1$.

Remarque 3.1. La forme bilinéaire b est non locale : pour certaines fonctions v_1 , v_2 à supports disjoints mais coupés par une même ligne $\Psi(x) = t$, on a $b(v_1, v_2) \neq o$.

Remarque 3.2. Heuristiquement, les fonctions de F sont les fonctions de $H^1_0(\Omega)$ qui sont "voisines de o" autour des points x où $\nabla\Psi(x) = o$.

3.2. Approximation du problème aux valeurs propres.

Il s'agit en fait d'une double approximation : on calcule d'abord un équilibre d'une façon approché (Ψ_h) puis on cherche à calculer une stabilité approchée.

On choisit une seule triangulation $\mathcal{C}_h$ de l'ouvert Ω (supposé polygonal) pour les deux approximations. L'équilibre Ψ_h est calculé suivant les méthodes du § 2, donc avec des éléments finis d'ordre 1.

On choisit d'autre part des subdivisions $\{z_{i,1}, \ldots, z_{i,n_i}\}$ des segments $[\underline{z_i}, \overline{z_i}]$ définis précédemment (et dépendant de Ψ_h).

On introduit l'espace V_h des éléments finis d'ordre 1 sur $\mathcal{C}_h$, nuls sur le bord de Ω. C'est une approximation externe de F (cf. remarque 3.2).

On définit la forme bilinéaire b_h (par analogie avec (3.3)) par

$$b_h(v_1 , v_2) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i - 1} \frac{1}{2} \left(z_{i,j+1} - z_{i,j} \right) \cdot \Big[q_i \, \beta_{ih} \, v_1 \, \beta_{ih} \, v_2(z_{i,j+1}) + q_i \, \beta_{ih} \, v_1 \, \beta_{ih} \, v_2(z_{i,j}) \Big] .$$

On définit donc une plus petite valeur propre μ_{1h} de : $u_h \in V_h$ tel que

$$(3.6) \qquad \int_\Omega \nabla u_h . \nabla v_h \, dx + \gamma \, b_h(u_h, v_h) = \mu_h \int_{\Omega_p} p''(\Psi_h) \, u_h \, v_h \, dx \quad \forall \, v_h \in V_h .$$

Le problème précédent s'écrit encore

$$(3.7) \qquad Bx = \mu_h \, Cx$$

où la matrice B a pour coefficients

$$b_{ij} = \int_\Omega \nabla w_i . \nabla w_j \, dx + \gamma \, b_h(w_i, w_j) \, .$$

On effectue une factorisation de CHOLEWSKY de la matrice B et on calcule μ_{1h} par la méthode des puissances itérées.

Signalons que la matrice B peut être assez remplie (50% dans l'exemple du § 4).

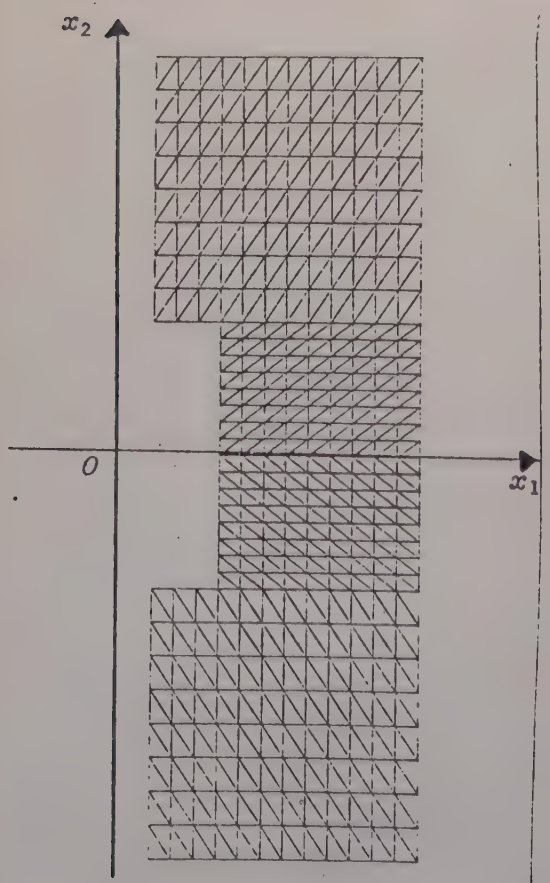


Figure.4 Triangulation

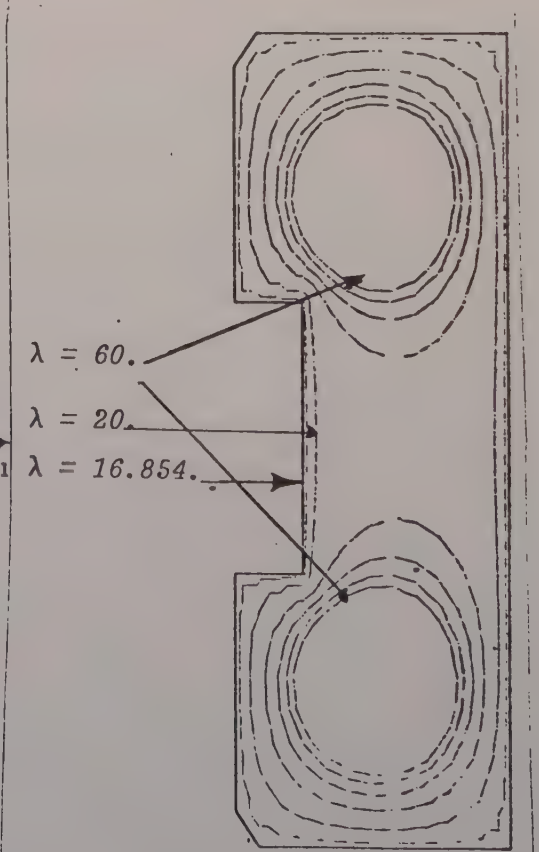


Figure. 5 Configurations d'équilibres symétriques

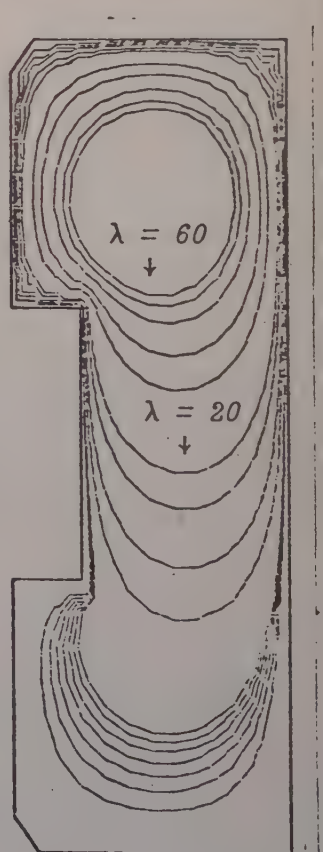


Figure. 6 Configuratio d'équilibres dissymétri

4. RESULTATS NUMERIQUES.

Les résultats numériques présentés ici concernent un cylindre droit de section Ω ; ce domaine Ω possède l'axe de symétrie $x_2 = 0$ (cf. fig. 4) ; la fonction p est $p(z) = \frac{1}{2}\lambda(z_+)^2$.

La triangulation du domaine Ω comprend 384 sommets et 672 triangles.

Pour calculer la branche des solutions symétriques, on a appliqué le premier algorithme sur le demi-ouvert, en suivant le sens des λ croissant. On a ensuite cherché à calculer une solution dissymétrique pour λ grand ($\lambda = 60$). On a employé le premier algorithme avec une initialisation dissymétrique et on a effectivement obtenu une solution dissymétrique. On a alors calculé une branche de solutions (dissymétriques) en employant le premier algorithme et en faisant décroître λ. Cette branche de solutions s'est raccordée à la première branche pour $\lambda = 16{,}854$. La solution symétrique correspondante est donc un point de bifurcation.

On avait d'ailleurs la preuve de cette bifurcation dès le calcul de la branche des solutions symétriques, car la courbe de $1/\nu_1$ en fonction de λ traverse l'axe $1/\nu_1 = 1$ pour la valeur $\lambda = 16{,}854$ (cf. § 2.4).

La bifurcation est illustrée par la fig. 7 où, pour chaque solution Ψ calculée, on représente la valeur de

$$\int_{x_2 > 0} \Psi \, dx - \int_{x_2 < 0} \Psi \, dx$$

qui renseigne sur la symétrie des solutions.

D'autre part, on a déterminé la stabilité de ces solutions en calculant la valeur de $1/\mu_1$ (cf. fig. 8).

Voici quelques données pratiques pour un ordinateur IBM 370/168. Pour le calcul d'une solution, la place mémoire est 180 K-octets, le temps d'exécution varie entre 10 et 30 s. suivant l'initialisation. Pour le calcul de μ_1, la place mémoire est 550 K-octets le temps d'éxécution est de 30 s.

Remarque 4.1 : On trouvera d'autres résultats numériques de bifurcation pour des problèmes très voisins de (2.6) dans [7] [16].

En conclusion, on peut dire que, d'une part, les algorithmes précédents sont très performants et, d'autre part, qu'ils ont permis de tracer un diagramme de bifurcation et de changement de stabilité, ce qui est un résultat nouveau.

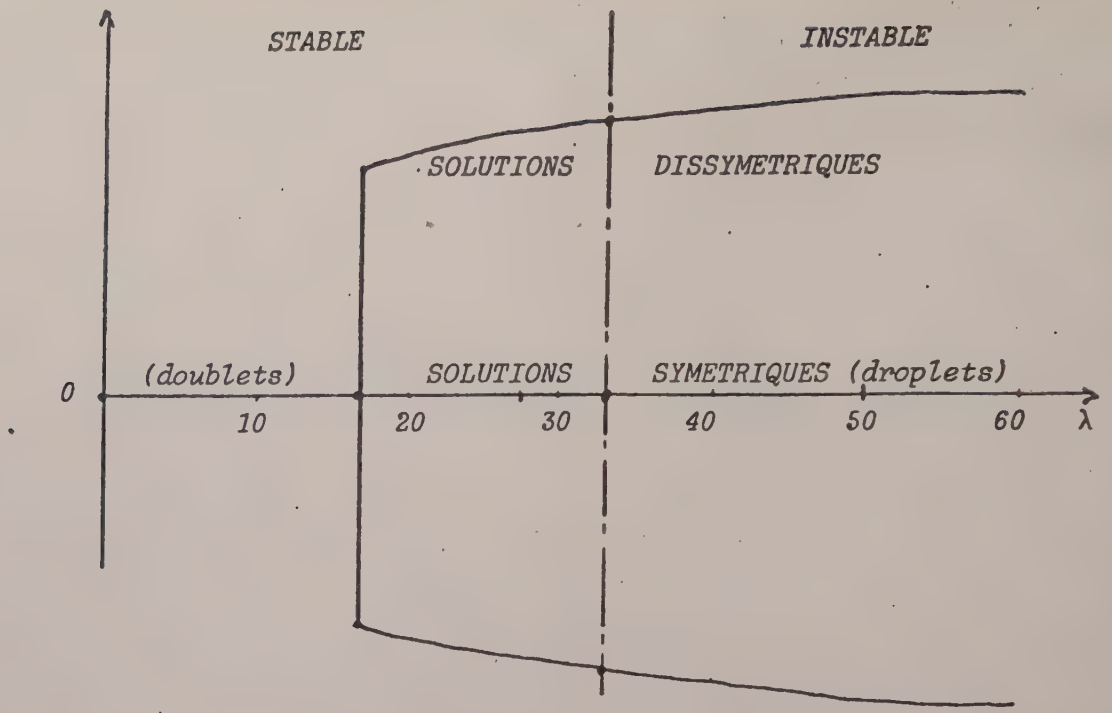


Figure 7

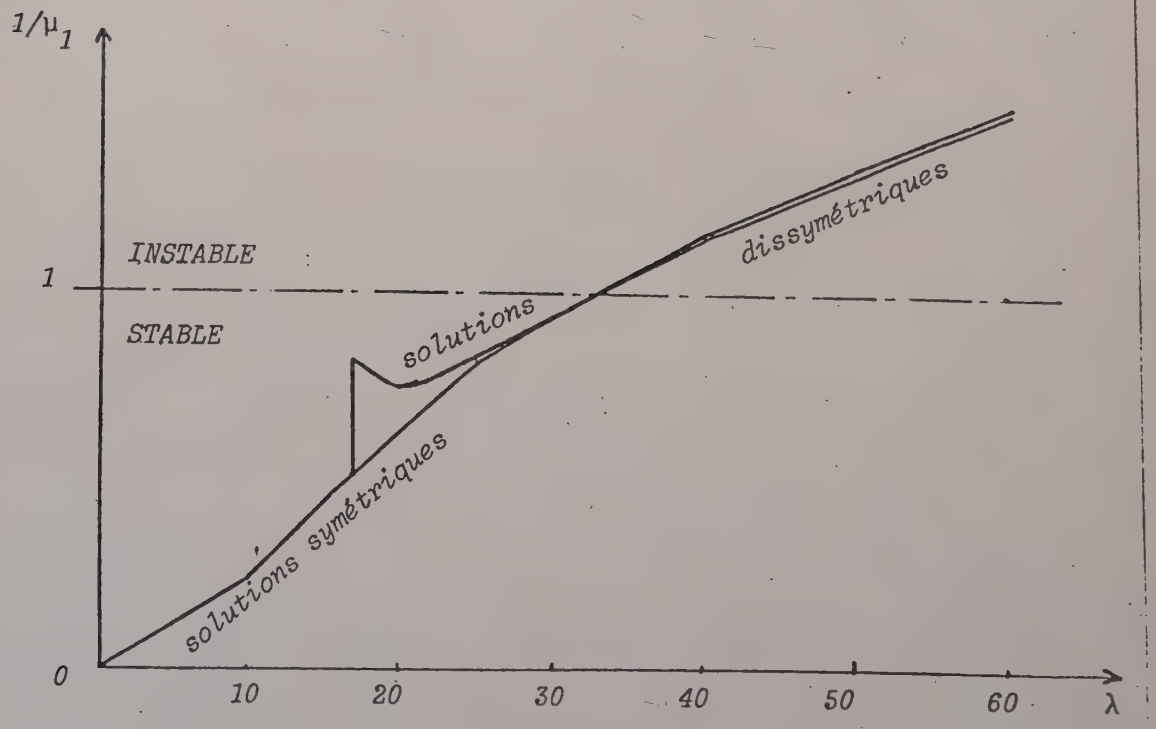


Figure 8

i) les solutions symétriques sont des doublets (c.-à-d. le plasma est connexe) jusqu'à $\lambda = 27{,}3$; ce sont des droplets (le plasma est non connexe) au-delà ;

ii) au-delà de $\lambda = 16{,}854$, les solutions variationnelles sont les solutions dissymétriques ;

iii) le changement de stabilité a lieu pour $\lambda = 33$.

REMERCIEMENTS

L'auteur voudrait remercier ici Monsieur R. TEMAM pour avoir dirigé ce travail, Monsieur R. GLOWINSKI pour en avoir permis l'exécution, Messieurs H. GRAD, B. GROSSMANN et H. WEITZNER pour l'avoir invité au sein de leur équipe au Courant Institute.

REFERENCES

[1] G. BATEMAN, MHD instabilities, the MIT Press, Massachusetts, 1978.

[2] H. BERESTYCKI et H. BREZIS, On a free boundary problem arising in plasma physics, Rapport 78017, Université de Paris, 1978.

[3] I.B. BERNSTEIN, E.A. FRIEMAN, M.D. KRUSKAL and R.M. KULSRUD, An energy principle for hydromagnetic stability problems, Proc. Royal Soc., A 244, 1958, 17-40.

[4] M.O. BRISTEAU, Application of optimal control theory to transonic flow computations by finite element methods, Lecture Notes in Physics, Computing Methods in Applied Sciences, 91, Third International Symposium, Versailles, 77, Springer-Verlag, 1979.

[5] T. GALLOUET, Contribution à l'étude d'une équation apparaissant en physique des plasmas, thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI, 1978.

[6] C. GUILLOPE, Sur un problème à frontière libre intervenant en physique des plasmas, thèse de 3ème cycle, Univ. de Paris XI, 1977.

[7] F.J. HELTON, T.S. WANG, MHD equilibrium in non-circular Tokamaks with field-shaping coil systems, Nuclear Fusion 18 11, 1978, 1523-1533.

[8] J.W. KITCHEN, Concerning the convergence of iterates to fixed points, Stud. Math., 27, 1966, 247-249.

[9] J. LAMINIE, Determination numérique de la configuration d'équilibre du plasma d'un Tokamak, Thèse de 3ème cycle, Univ. Paris XI, 1977.

[10] J.P. PUEL, Un problème de valeurs propres non linéaires et de frontière libre, Rapport 76016, Université de Paris, 1976.

[11] E. REBHAN, A. SALAT, Axisymmetric MHD stability of sharp-boundary Tokamaks, Nuclear Fusion, 17 2, 1977, 251-260.

[12] M. SERMANGE, Une méthode numérique en bifurcation, Application à un problème à frontière libre de la physique des plasmas, Appl. Math. and Optim. 5, 1979, 127-151.

[13] M. SERMANGE, Bifurcation of free boundary plasma equilibria, Rapport Laboria, 385 (1979).

[14] M. SERMANGE, Détermination numérique de la stabilité des solutions des équations de Grad-Shafranov, à paraître.

[15] J. SIJBRAND, Computations of the bifurcation solutions of a class of problems with a free boundary, Bifurcation analysis for a class of problems with a free boundary, lecture notes 90, 91, University of Utrecht, (1978).

[16] R. TEMAM, Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics, Comm. in P.D.E., 2(6), 1977, 563-585.

-o-

CHAPITRE VII

CALCUL DE LA STABILITE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE AXISYMETRIQUE

Résumé :

Ce chapitre porte sur des transformations (calculs algébriques et intégrations par parties) de la fonctionnelle de Bernstein et al appliquée à des perturbations axisymétriques. Les outils mathématiques du Chap. V permettent d'en déduire une condition suffisante de stabilité axisymétrique portant sur la première valeur propre d'un problème aux limites scalaire.

0. INTRODUCTION.

Considérons un plasma à l'équilibre dans une cavité Ω entourée par une paroi parfaitement conductrice Γ. Nous notons Ω_p la région occupée par le plasma, Ω_v la région vide, Γ_p l'interface plasma-vide. Le champ magnétique (B) et la pression (P) vérifiant les équations d'équilibre rot $B \times B$ = grad P dans Ω_p, rot B = 0 dans Ω_v et div B = 0 dans Ω.

Bernstein et al [2] ont montré que la stabilité (linéarisée) d'un équilibre est déterminée par le signe d'une fonctionnelle δW définie pour tout déplacement ξ sur Ω_p.

Posant Q = rot $(\xi \times B)$, δW est donné par

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_S + \delta W_v$$

où ($\gamma = 5/3$)

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} \{|Q|^2 - \text{rot } B \cdot Q \times \xi + (\text{div } \xi)(\xi \cdot \text{grad } P) + \gamma P (\text{div } \xi)^2\} \, dx$$

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} n \cdot < \text{grad } (P + \frac{1}{2} B^2) > (n \cdot \xi)^2 \, d\sigma$$

$$\delta W_o = \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} |\text{rot } A|^2 \, dx.$$

La fonctionnelle δW doit être minimisée par rapport à toute perturbation ξ sur Ω_p et tout champ A sur Ω_v vérifiant les conditions aux limites :

(0.1) $\quad n \times A = -(n \cdot \xi) B$ sur Γ_p,

(0.2) $\quad n \times A = 0$ sur Γ.

Pour simplifier, nous supposerons dans ce papier que

(0.3) $\quad$ B et P sont de classe C^1 au voisinage de Γ_p,

ce qui entraîne que $\delta W_S = 0$.

Nous allons transformer δW_F (N° 1) puis le minorer à l'aide des techniques du Chap. V (N° 2), nous minorerons ensuite δW_v (N° 3). Nous obtiendrons alors une condition suffisante de stabilité portant sur la première valeur propre d'un problème variationnel (N° 4) que nous écrivons ensuite sous la forme d'un problème aux limites (N° 5).

1. - CALCUL DE δW_F POUR DES PERTURBATIONS AXISYMETRIQUES.

Considérons un équilibre symétrique par rapport à un axe Oz. L'espace est décrit par un système de coordonnées cylindriques (r,ϕ,z). Désormais, Ω, Ω_p, Ω_v, Γ, Γ_p sont considérés dans un plan méridien.

Le champ magnétique B et la pression P d'un tel équilibre peuvent s'exprimer à l'aide d'un flux poloïdal $\psi(r,z)$ par

$$B = \text{grad } \psi \times \frac{e_\phi}{r} + \frac{f(\psi)}{r} e_\phi \ , \ P = P(\psi)$$

où f et P sont des fonctions arbitraires (cf. G. BATEMAN [1]).

Nous supposerons ici que les lignes ψ = cte sont des courbes fermées simples. Dans ce cas, nous pouvons supposer que $\psi = 0$ sur Γ_p et que les régions Ω_p et Ω_v sont définie respectivement par $\psi > 0$ et $\psi < 0$; nous notons $\bar{\psi}$ la valeur maximale de ψ dans Ω_p et $\underline{\psi}$ la valeur de ψ sur Γ, c.-à-d. la valeur minimale de ψ dans Ω_v.

Nous introduisons

$$B_1 = \nabla\psi, \ B_2 = -\frac{f(\psi)}{r|\nabla\psi|^2} \nabla\psi \times e_\phi + \frac{e_\phi}{r}$$

qui vérifient $B = B_1 \times B_2$.

Considérons une perturbation axisymétrique

$$\xi = \xi_r(r,z)e_r + \xi_\phi(r,z)e_\phi + \xi_z(r,z)e_z.$$

Posant $\xi \cdot B_1 = u$, $\xi \cdot B_2 = v$, nous avons

$$\xi \times B = vB_1 - u\,B_2,$$

$$Q = \text{rot}\,(\xi \times B) = \text{grad}\, v \times B_1 - \text{grad}\, u \times B_2 - u\,\text{rot}\,B_2 \ ;$$

or, pour $C(r,z) = C_r(r,z)e_r + C_z(r,z)e_z$ quelconque,

$$\text{rot}\,(C \times e_\phi) = -\text{div}_2(C)e_\phi \tag{1.1}$$

avec $\text{div}_2\, C = \frac{\partial}{\partial r} C_r + \frac{\partial}{\partial z} C_z$.

Ainsi

$$Q = \text{grad}\, v \times B_1 - \text{grad}\, u \times B_2 - u\,\text{div}_2\,(\frac{f(\psi)}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi)e_\phi \ ; \tag{1.2}$$

regroupant deux termes contenant des divergences et posant

$$C_1(r,z) = \text{grad}\, v \times \text{grad}\,\psi \cdot e_\phi - \text{div}_2(\frac{uf(\psi)}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi) \ ,$$

nous obtenons

$$|Q|^2 = \frac{1}{r^2}\,|\nabla u|^2 + C_1^2. \tag{1.3}$$

D'autre part, d'après les équations de STOKES-GRAD-SHAFRANOV,

$$\text{rot}\, B = (rP'(\psi) + \frac{1}{r} f(\psi)f'(\psi))e_\phi + f'(\psi)\,\text{grad}\,\psi \times \frac{e_\phi}{r}$$

Cette relation et (1.2) donnent, en posant

$$C_2(r,z) = \frac{f'(\psi)}{r}\,\nabla\psi \times e_\phi \cdot (u\,\text{grad}\, v - v\,\text{grad}\, u),$$

$$-\,\text{rot}\, B \times Q \cdot \xi = P'(\psi)\,\xi \cdot \text{grad}\, u + \frac{u^2}{r} f'(\psi)\,\text{div}_2(\frac{f(\psi)\nabla\psi}{r|\nabla\psi|^2}) + C_2. \tag{1.4}$$

Nous pouvons maintenant calculer le terme δW_F. Par intégration par

partie dans $\mathbb{R}^3$, nous obtenons (la normale dirigée vers l'extérieur de Ω_p est $-\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$)

$$\begin{cases} \int_{\Omega_p} (\operatorname{div}\xi)(\xi\cdot\operatorname{grad} P)r\,dr\,dz = -\int_{\Omega_p} (\xi\cdot\operatorname{grad})(\xi\cdot\operatorname{grad} P)r\,dr\,dz \\ - P'(0)\int_{\psi=0} u^2 \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} ; \end{cases}$$

or

$$(1.5) \qquad (\xi\cdot\operatorname{grad})(\xi\cdot\operatorname{grad} P) = -u^2 P''(\psi) - P'(\psi)\,\xi\cdot\operatorname{grad} u.$$

Intégrant (1.3)-(1.5), nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\,\delta W_F = \frac{1}{2}\int_{\Omega_p} \{\frac{1}{r}|\nabla u|^2 - [rP''(\psi)+f'(\psi)\operatorname{div}_2(\frac{f(\psi)\nabla\psi}{r|\nabla\psi|^2})]u^2 + rC_1^2 + rC_2\}\,dr\,dz \\ - \frac{P'}{2}(0)\int_{\psi=0} u^2 \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} + \frac{\gamma}{2}\int_{\Omega_p} P(\psi)\cdot(\operatorname{div}\xi)^2\, r dr\,dz. \end{cases}$$

Par intégration par partie dans $\mathbb{R}^2$, nous avons

$$\int_{\Omega_p} f'(\psi)\,\operatorname{grad}\psi\times e_\phi\cdot\operatorname{grad}(u\,v)drdz = -\int_{\Omega_p} \operatorname{div}(f'(\psi)\operatorname{grad}\psi\times e_\phi)uv\,dr\,dz = 0 ;$$

d'où

$$\int_{\Omega_p} rC_2(r,z)dr\,dz = 2\int_{\Omega_p} uf'(\psi)\,\operatorname{grad} v\times\operatorname{grad}\psi\cdot e_\phi\,dr\,dz ;$$

nous en déduisons

$$\int_{\Omega_p} (C_1^2(r,z) + C_2(r,z))r\,dr\,dz = D_1 + D_2$$

où

$$\begin{cases} D_1 = \int_{\Omega_p} \{\nabla v\times\nabla\psi\cdot e_\phi - \operatorname{div}_2(\frac{uf(\psi)}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi) + \frac{f'(\psi)}{r}u\}^2 r\,dr\,dz - \int_{\Omega_p}\frac{f'^2(\psi)}{r}u^2 drdz \\ = \int_{\Omega_p} \{\nabla v\times\nabla\psi\cdot e_\phi - f(\psi)\operatorname{div}_2(\frac{u\nabla\psi}{r|\nabla\psi|^2})\}^2 rdrdz - \int_{\Omega_p}\frac{f'^2(\psi)}{r}u^2\,drdz \end{cases}$$

et

$$D_2 = 2\int_{\Omega_p} uf'(\psi)\operatorname{div}_2(\frac{uf(\psi)}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi)dr\,dz$$

$$= 2\int_{\Omega_p} u^2 f'(\psi)\ \mathrm{div}_2\ (\frac{f(\psi)}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi)dr\ dz + \int_{\Omega_p} (2u\nabla u)\ \frac{f(\psi)f'(\psi)}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi\ dr\ dz\ ;$$

une intégration par parties du dernier terme donne

$$-\int_{\Omega_p} u^2\ \mathrm{div}_2\ (\frac{f(\psi)f'(\psi)}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi)dr\ dz - f(0)f'(0)\int_{\psi=0} u^2\ \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} D_2 = \displaystyle\int_{\Omega_p} u^2\ f'(\psi)\ \mathrm{div}_2(\frac{f(\psi)}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi)dr\ dz - \int_{\Omega_p} u^2\ \frac{f(\psi)f''(\psi)}{r}\ dr\ dz \\ \quad - f(0)f'(0)\displaystyle\int_{\psi=0} u^2\ \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\ . \end{array}\right.$$

Nous obtenons finalement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\ \delta W_F = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega_p}\{\frac{1}{r}|\nabla u|^2 - [rP''(\psi) + \frac{f(\psi)f''(\psi)+f'^2(\psi)}{r}]\ u^2\}\ dr\ dz \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega_p}\{\nabla v\times\nabla\psi\cdot e_\phi - f(\psi)\ \mathrm{div}_2\ (\frac{u\nabla\psi}{r|\nabla\psi|^2})\}^2\ rdr\ dz \\ \qquad + \dfrac{\gamma}{2}\displaystyle\int_{\Omega_p} P(\psi)(\mathrm{div}\ \xi)^2\ rdr\ dz \\ \qquad - \dfrac{P'(0)}{2}\displaystyle\int_{\psi=0} u^2\ \frac{rd\sigma}{|\nabla\psi|} - \frac{f(0)f'(0)}{2}\int_{\psi=0} u^2\ \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\ . \end{array}\right.$$

L'hypothèse (0.3), inutilisée jusqu'à présent, donne $P'(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, ce qui supprime les deux derniers termes dans l'égalité précédente.

2. - MINORATION DE δW_F.

Nous avons établi au N° 1 que

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\ \delta W_F = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega_p}\frac{1}{r}|\nabla u|^2 dr\ dz - \frac{1}{2}\int_{\Omega_p}[rP''(\psi)+\frac{f(\psi)f''(\psi)+f'^2(\psi)}{r}]u^2\ dr\ dz \\ \qquad + \gamma\delta W_1 + \delta W_2 \end{array}\right.$$

où

$$\delta W_1 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_p} P(\psi)(\mathrm{div}\ \xi)^2\ rdr\ dz,$$

$$\delta W_2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_p}\{\nabla v\times\nabla\psi\cdot e_\phi - f(\psi)\mathrm{div}_2(\frac{u}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi)\}^2\ rdr\ dz.$$

D'après le théorème intégral de H. Federer (cf. [3]),

$$\delta W_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} P(t) \Big(\int_{\psi=t} (\operatorname{div} \xi)^2 \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} \Big) dt.$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\Big(\int_{\psi=t} (\operatorname{div} \xi) \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} \Big)^2 \le \int_{\psi=t} \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} \cdot \int_{\psi=t} (\operatorname{div} \xi)^2 \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} .$$

Or, d'après notre Prop. 4.3, Chap V (appliquée sur $\mathbf{R}^3$)

$$\int_{\psi=t} \operatorname{div} \xi \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} = \frac{d}{dt} \int_{\psi=t} u \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} .$$

Posant $\rho_1(t) = \int_{\psi=t} \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|}$, nous avons donc obtenu

$$\delta W_1 \ge \frac{1}{2} \int_0^{\infty} P(t) \rho_1^{-1}(t) \Big(\frac{d}{dt} \int_{\psi=t} u \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} \Big)^2 dt. \tag{2.1}$$

Minoration de δW_2.

Nous remarquons que

$$\nabla v \times \nabla\psi \cdot e_\phi = (\nabla\psi \times e_\phi) \cdot \nabla v = |\nabla\psi| \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

où $\frac{\partial}{\partial\tau}$ désigne la dérivée tangentielle suivant les lignes ψ= Cte avec l'orientation de $\tau = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \times e_\phi$.

Ainsi

$$\delta W_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} C^2(r,z) r dr\, dz$$

avec

$$C(r,z) = |\nabla\psi| \frac{\partial v}{\partial \tau} - f(\psi) \operatorname{div}_2 \Big(\frac{u}{r|\nabla\psi|^2} \nabla\psi \Big).$$

Le théorème intégral de Federer donne

$$\delta W_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Big(\int_{\psi=t} C^2(r,z) \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} \Big) dt.$$

Posant $\rho_2(t) = \int_{\psi=t} \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\Big(\int_{\psi=t} C(r,z) \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \Big)^2 \le \rho_2(t) \int_{\psi=t} C^2(r,z) \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} .$$

Or

$$\int_{\psi=t} C(r,z)\,\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} = -f(t)\int_{\psi=t} \mathrm{div}_2\Big(\frac{u}{r|\nabla\psi|^2}\nabla\psi\Big)\,\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}$$

ce qui vaut, d'après la Prop. 4.3 du Chap. V, utilisée cette fois sur $\mathbb{R}^2$,

$$-f(t)\,\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\ .$$

Nous avons donc

$$\delta W_2 \geq \frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(t)\rho_2^{-1}(t)\Big(\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\Big)^2\,dt. \tag{2.2}$$

3. - MINORATION DE δW_v.

Considérons un champ axisymétrique A quelconque sur Ω_v :

$$A = A_r(r,z)e_r + A_\phi(r,z)e_\phi + A_z(r,z)e_z.$$

Nous avons

$$|\mathrm{rot}\ A|^2 = \frac{1}{r^2}\,|\nabla rA_\phi|^2 + \Big|\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\Big|^2\ ,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\,\delta W_v = \frac{1}{2}\int_{\Omega_v}\frac{1}{r}\,|\nabla rA_\phi|^2\,dr\,dz + \delta W_3$$

avec

$$\delta W_3 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_v}\Big|\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\Big|^2\,rdr\,dz\ .$$

Grâce au théorème intégral de Federer,

$$\delta W_3 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0\Big(\int_{\psi=t}\Big|\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\Big|^2\,\frac{rd\sigma}{|\nabla\psi|}\Big)dt\ ;$$

utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons $\delta W_3 \geq \delta W_4$ avec

$$\delta W_4 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \rho_2^{-1}(t)\Big\{\int_{\psi=t}\Big(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\Big)\,\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\Big\}^2\,dt.$$

Puisque

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = \mathrm{div}_2(A\times e_\phi),$$

la Prop. 4.3, Chap. V, donne

$$\delta W_4 = \frac{1}{2}\int_{\underline{\psi}}^{0} \rho_2^{-1}(t)(w'(t))^2\,dt$$

avec

$$w(t) = \int_{\psi=t} e_\phi(\nabla\psi \times A)\,\frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}\,.$$

Le produit scalaire de (0.1) et (0.2) par e_ϕ donne

$$(3.1)\qquad w(\underline{\psi}) = 0\,,\ w(0) = -f(0)\int_{\psi=0} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\,.$$

La minimisation de δW_4 par rapport à $w \in H^1(]\underline{\psi},0[)$ vérifiant (3.1) est un problème classique dont la solution est

$$w(t) = C\int_{\underline{\psi}}^{t} \rho_2(t)dt = C\int_{\underline{\psi}<\psi<t} \frac{drdz}{r}\,,$$

avec

$$C = \Big(\int_{\Omega_v} \frac{drdz}{r}\Big)^{-1}(-f(0))\int_{\psi=0} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\,.$$

Nous obtenons comme minorant de δW_4

$$\frac{1}{2}\,f^2(0)\Big(\int_{\Omega_v} \frac{drdz}{r}\Big)^{-1}\Big(\int_{\psi=0} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\Big)^2$$

D'autre part, le produit scalaire de (0.1) et (0.2) par $e_\phi \times \nabla\psi$ donne $rA_\phi = -u$ sur Γ_p et $rA_\phi = 0$ sur Γ.

Finalement, posant $\alpha = \Big(\int_{\Omega_v} \frac{drdz}{r}\Big)^{-1} f^2(0)$, δW_v est minoré par

$$(3.2)\qquad \frac{1}{2\pi}\,\delta W_v \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_v} \frac{1}{r}\,|\nabla u|^2\,drdz + \frac{\alpha}{2}\Big(\int_{\psi=0} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\Big)^2$$

avec u continu sur Γ_p et u=0 sur Γ.

4. - UN PROBLEME VARIATIONNEL.

Notons

$$G(r,z) = rP''(\psi) + \frac{1}{r}\,(ff''(\psi) + f'^2(\psi))\,,$$

$$b_1(u,v) = \int_0^{\bar{\psi}} \rho_1^{-1} P\Big(\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\frac{rd\sigma}{|\nabla\psi|}\Big)\cdot\Big(\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} v\,\frac{rd\sigma}{|\nabla\psi|}\Big)dt\,,$$

$$b_2(u,v) = \int_0^{\bar\psi} \rho_2^{-1} f^2 \left(\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} u \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\right)\left(\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} v \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\right) dt.$$

Regroupant les résultats des N° précédents, nous obtenons

$$\left\{ \frac{1}{2\pi}\delta W \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{r}|\nabla u|^2 \, dr\, dz - \frac{1}{2}\int_{\Omega_p} G\cdot u^2 dr\, dz + \frac{\gamma}{2} b_1(u,u) + \frac{1}{2} b_2(u,u) \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha}{2}\left(\int_{\psi=0} u \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\right)^2 , \right.$$

avec u continu sur Γ_p et u=0 sur Γ.

Nous associons à δW les espaces suivants

$$\left\{ \tilde V = \{v \in H_o^1(\Omega),\ \rho_1^{-1/2} p^{1/2} \frac{d}{dt}\int_{\psi=t} v \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} \in L^2(]0,\bar\psi[), \right.$$
$$\left. \rho_2^{-1/2}|f| \frac{d}{dt}\int_{\psi=t} v \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|} \in L^2(]0,\bar\psi[)\} \right.$$

et

$$V = \{v \in \tilde V \text{ t.q. } \lim_{t\to\bar\psi}\int_{\psi=t} v \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} = 0,\ \lim_{t\to\bar\psi}\int_{\psi=t} v \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|} = 0\} .$$

Il s'agit d'espaces analogues à ceux introduits au Chap. V, mais avec poids.

Une condition suffisante[1] de stabilité axisymétrique est donc que, pour tout $v \in V$,

$$\left\{ 0 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{r}|\nabla u|^2 \, dr\, dz - \frac{1}{2}\int_{\Omega_p} G\, u^2 dr\, dz + \frac{\gamma}{2} b_1(u,u) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} b_2(u,u) + \frac{\alpha}{2}\left(\int_{\psi=0} u \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\right)^2 . \right.$$

Cette inégalité est équivalente à

$$1 \leq R(v) \quad \forall v \in V$$

avec

$$R(v) = \frac{\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{r}|\nabla u|^2 dr dz + \frac{1}{2}\int_{\Omega_p} G_- u^2 dr dz + \frac{\gamma}{2} b_1(u,u) + \frac{1}{2} b_2(u,u) + \frac{\alpha}{2}\left(\int_{\psi=0} u \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\right)^2}{\frac{1}{2}\int_{\Omega_p} G_+ u^2 dr\, dz} ,$$

(en notant $s_+ = \max(s,0)$, $s_- = \max(-s,0)$).

On reconnaît un quotient de Rayleigh, dont la valeur minimale est donnée par la première valeur propre μ_1 du problème variationnel :

---

(1) les techniques du Chap. V devraient permettre de démontrer qu'il s'agit d'une C.N.S.

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \text{trouver } (\mu,u)\in\mathbb{R}\times V,\ u\not\equiv 0, \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r}\,\nabla u\cdot\nabla v\,dr\,dz + \int_{\Omega_p} G_- uv\,dr\,dz + \gamma b_1(u,v) + b_2(u,v) \\ \displaystyle + \alpha\int_{\psi=0} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\cdot\int_{\psi=0} v\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|} = \mu\int_{\Omega_p} G_+ uv\,dr\,dz \quad \forall v\in V. \end{cases}$$

5. - UN PROBLEME AUX LIMITES.

Soit $(\mu,u)\in\mathbb{R}\times V$ une solution de (4.1) qui admette un prolongement résulier dans $\overline{\Omega}_p$ et dans $\overline{\Omega}_v$. Prenons $v\in\mathcal{D}(\Omega_p)$ et utilisons la formule de Green sur le premier terme et l'intégration par parties sur les termes b_1 et b_2. Nous obtenons, en posant $\mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z})$,

$$\int_{\Omega_p}\Big[\mathcal{L}u + G_- u - r\frac{d}{dt}\Big(\rho_1^{-1}\gamma P\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\frac{r\,d\sigma}{|\nabla\psi|}\Big) - \frac{1}{r}\Big(\frac{d}{dt}\rho_2^{-1}f^2\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\Big) - \mu G_+ u\Big]v\,dr\,dz = 0$$

ce qui entraîne, puisque $v\in\mathcal{D}(\Omega_p)$ est quelconque, que

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}u + G_- u - r\frac{d}{dt}\Big(\rho_1^{-1}\gamma P\frac{d}{dt}\displaystyle\int_{\psi=t} u\,\frac{r\,d\sigma}{|\nabla\psi|}\Big)_{t=\psi(x)} \\ \displaystyle -\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\Big(\rho_2^{-1}f^2\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\Big)_{t=\psi(x)} = \mu G_+ u \text{ dans } \Omega_p. \end{cases}$$

D'autre part, nous obtenons trivialement que $\mathcal{L}u = 0$ dans Ω_v.

Prenons maintenant $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ et multiplions (5.1) par v dans Ω_p, $\mathcal{L}u$ par v dans Ω_v ; nous utilisons à nouveau la formule de Green et nous faisons la différence avec (4.1). Nous obtenons, en notant ν la normale dirigée vers l'extérieur de Γ_p, $\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\Gamma_{p_i}}$ la valeur de $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ dans Ω_p, $\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\Gamma_{p_e}}$ la valeur dans Ω_v :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_p}\Big\{-\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\Gamma_{p_i}} + \frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\Gamma_{p_e}} + \Big[\rho_2^{-1}(0)\Big(\frac{d}{dt}\int_{\psi=t} u\,\frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|}\Big)_{t=0} \\ \displaystyle -\Big(\int_{\Omega_v}\frac{dr\,dz}{r}\Big)^{-1}\int_{\psi=0}\frac{u\,d\sigma}{r|\nabla\psi|}\Big]\cdot\frac{f^2(0)}{|\nabla\psi|}\Big\}\,v\,\frac{dr\,dz}{r} = 0. \end{cases}$$

Puisque $v\in\mathcal{D}(\Omega)\cap V$ est quelconque sur Γ_p, nous en déduisons que le terme de l'accolade est nul sur Γ_p.

Nous avons ainsi démontré que (μ,u) est solution du problème aux limites suivant.

Notations :

$$g(r,s) = rP'(s) + \frac{1}{r} ff'(s)$$

$$G(r,s) = g'_s(r,s) = rP''(s) + \frac{1}{r} (ff''(s) + f'^2(s)),$$

$$\mathcal{L}u = - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z}),$$

$$\rho_1(t) = \int_{\psi=t} \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|} , \quad \rho_2(t) = \int_{\psi=t} \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|} ,$$

$$\mathcal{L}_p u = -r \frac{d}{dt} (\rho_1^{-1} P \frac{d}{dt} \int_{\psi=t} u \frac{r d\sigma}{|\nabla\psi|})_{t=\psi(x)} ,$$

$$\mathcal{L}_{f^2} u = - \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (\rho_2^{-1} f^2 \frac{d}{dt} \int_{\psi=t} u \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|})_{t=\psi(x)} .$$

Problème aux limites :

Trouver (μ,u) tels que

$$(5.2) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u + \gamma \mathcal{L}_p u + \mathcal{L}_{f^2} u + G_+ u = \mu G_- u \text{ dans } \Omega_p, \\ u(x_o) = 0 \text{ pour } \psi(x_o) = \bar{\psi} , \\ u \text{ continu sur } \Gamma_p, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_{p_i}} - \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_{p_e}} = \frac{f^2(0)}{|\nabla\psi|} \{\rho_2^{-1}(0) (\frac{d}{dt} \int_{\psi=t} u \frac{d\sigma}{r|\nabla\psi|})_{t=0} \\ - (\int_{\Omega_v} \frac{dr dz}{r})^{-1} \cdot \int \frac{u d\sigma}{r|\nabla\psi|} \} \quad \text{sur } \Gamma_p, \\ \mathcal{L}u = 0 \text{ dans } \Omega_v, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

En conclusion, une condition suffisante de stabilité axisymétrique est que μ_1, première valeur propre de (4.1) ou (5.2), vérifie $\mu_1 \geq 1$. D'un point de vue numérique, il est possible d'associer au problème variationnel (4.1) un problème approché en remplaçant l'espace V par un sous-espace V_h de dimension finie ; la valeur de μ_{1h} peut alors être déterminée par la méthode des puissances itérées.

Références :

[1] G. BATEMAN, "MHD instabilities", The MIT Press, Cambridge (Massachussetts) 1978.

[2] I.B. BERNSTEIN, E.A. FRIEMAN, M.D. KRUSKAL, R.M. KULSRUD, "An energy principle for hydromagnetic stability problems", Proc. Royal Soc. A 244, 17-40 (1958).

[3] H. FEDERER, "Geometric Measure Theory", Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1969.

ANNEXE

CHAPITRE VIII

79

PHYSIQUE DES PLASMAS : MODULES DE CALCUL D'EQUILIBRES MHD AXISYMETRIQUES

M. SERMANGE

Février 1982

SOMMAIRE :

Le but des modules présentés ici est la simulation du confinement d'un plasma dans un TOKAMAK (un des dispositifs de recherche en fusion thermonucléaire).

Ils s'enchainent au module APMEFI de génération d'un maillage bidimensionnel.

Cette brochure comprend trois parties :

1. Rappel des équations et description de l'algorithme utilisé
2. Mise en oeuvre des modules
3. Exemples d'utilisation.

1. Rappel des équations et description de l'algorithme utilisé :

1.1. Rappel des équations

Le confinement d'un plasma dans un TOKAMAK peut être modélisé par les équations de la MHD (Magnétohydrodynamique) axisymétrique que nous rappelons ci-dessous. Pour plus de détails, voir G. BATEMAN [1], C. MERCIER [5], R. TEMAM [7].

L'espace est décrit par un système de coordonnées cylindriques (r,ϕ,z), oz étant l'axe du Tokamak.

Dans un plan méridien, nous notons Ω la chambre à vide, limitée par un "liner" Γ_1 supposé parfaitement conducteur ; l'ensemble occupé par le plasma est noté Ω_p, le vide Ω_v et l'interface plasma-vide Γ_p.

Plus généralement, nous désignerons par Ω une partie de la chambre à vide, limitée par un "liner" Γ_1 et par une frontière de symétrie Γ_2. Les variables de travail sont (r,z), parfois notées (x_1,x_2).

A un équilibre MHD axisymétrique correspond un champ magnétique B et une pression P qui peuvent s'exprimer à l'aide d'un flux poloïdal $\psi(r,z)$. Le champ magnétique est donné par :

$$B = \text{grad } \psi \times \frac{e_\phi}{r} + \frac{f(\psi)}{r} e_\phi$$

et la pression par $P = P(\psi)$ où les fonctions f et P sont arbitraires.

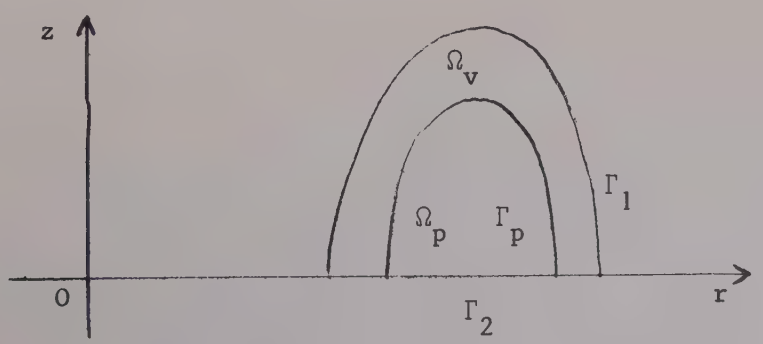
Dans le plasma, le flux poloïdal ψ satisfait les équations de STOKES-GRAD-SHAFRANOV

$$(1.1) \qquad L\psi = r\,\mu_o\,P'(\psi) + \frac{1}{r}\,f(\psi)\,f'(\psi)$$

où L désigne $-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ et $\mu_o = 4\pi\,10^{-7}$,

tandis que dans le vide nous avons $P(\psi) = 0$, $f(\psi)$=cte et

$$(1.2) \qquad L\psi = 0$$



Les conditions aux limites sont

$$(1.3)\quad \begin{cases} \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_p, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} \text{ continu sur } \Gamma_p, \\ \psi = \text{cte (inconnue) sur } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

où ν désigne la normale sur la frontière envisagée.

L'intégration de (1.1) dans Ω_p donne la valeur du courant dans le plasma (resp. dans une partie du plasma lorsque Ω est une partie de la chambre à vide)

$$I = \int_{\Omega_p} J_\phi \, dr \, dz = \frac{1}{\mu_o} \int_{\Omega_p} L\psi \, dr \, dz$$

d'où

$$(1.4)\quad - \int_{\Gamma_p} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, d\sigma = \mu_o I.$$

Nous cherchons des solutions de (1.1) -(1.4) lorsque

$$(1.5)\quad J_\phi = r P'(\psi) + \frac{1}{r\mu_o} f(\psi) f'(\psi) > 0 \text{ dans } \Omega_p.$$

L'application du principe du maximum pour l'opérateur L dans Ω_p puis dans Ω_v montre que nécessairement $\psi > 0$ dans Ω_p et $\psi < 0$ dans Ω_v. Ainsi le plasma apparaît comme la région $\psi > 0$, l'interface plasma-vide comme la courbe $\psi = 0$ et le vide comme $\psi < 0$.

L'algorithme que nous allons décrire plus loin est basé sur le choix des données suivantes :

i) le domaine Ω,
ii) les fonctions $P(\psi)$ et $f(\psi)$
iii) le courant de plasma I.

Posant $g(r,\psi) = r\mu_o P'(\psi) + \frac{1}{r} f(\psi)f'(\psi)$, nous cherchons des fonctions $\psi \in H^2(\Omega)$ (espace de Sobolev d'ordre 2 sur Ω) telles que :

$$(1.6)\quad \begin{cases} L\psi = \begin{cases} g(r,\psi) & \text{si} \quad \psi \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad \psi < 0, \end{cases} \\ \psi = \text{cte (inconnue)} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2, \\ \displaystyle\int_{\Gamma_p} -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, d\sigma = \mu_o I. \end{cases}$$

Toute solution ψ de (1.6) fournit un équilibre MHD avec

$$\Omega_p = \{x \in \Omega \text{ t.q. } \psi(x) > 0\}, \qquad \Omega_v = \{x \in \Omega \text{ t.q. } \psi(x) < 0\}.$$

Remarques :

1) le cas des équilibres MHD cylindriques se déduit du cas précédent en remplaçant les poids r et $\frac{1}{r}$ par 1.

2) si des bobinages ponctuels M_j, parcourus par un courant I_j, sont présents dans Ω_v, l'équation (1.2) est remplacée par

$$(1.2)' \quad L\psi = - \sum_j \mu_o I_j \, \delta(M-M_j)$$

et les solutions sont cherchées dans $L^2(\Omega)$.

1.2. Description de l'algorithme

Nous utilisons ici un algorithme étudié par BERESTYCKI-BREZIS [2] et HERON-S. [3].

Les hypothèses sur les données sont les suivantes. Désignons par α et β les quantités géométriques suivantes :

$$0 < \alpha \leq r \leq \beta \qquad \forall (r,z) \in \Omega.$$

(H1) $\begin{cases} \text{Les deux fonctions de la variable } u : \\ \quad \alpha^2 P'(u) + f(u)f'(u) \quad \text{et} \quad \beta^2 P'(u) + f(u)f'(u), \\ \text{définies sur } [0,\infty[\text{ , sont continues, croissantes (au sens large)} \\ \text{et strictement positives pour } u > 0 \ ; \end{cases}$

(H2) $$0 < \mu_o I < \mu_o I_\infty \quad \text{où} \quad \mu_o I_\infty = \lim_{u \to \infty} \int_\Omega g(r,u)\, dr\, dz$$

Il faut remarquer que dans le cas (autorisé par H1) où $\alpha^2 P'(0) + f(0)f'(0)$ et $\beta^2 P'(0) + f(0)\, f'(0) \neq 0$, le second membre de (1.6) est <u>discontinu</u> (cf. le N°3 de cette brochure).

<u>Description de l'algorithme</u>

Nous introduisons l'ensemble

$$K = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \int_{v>0} g(r,v\ (r,z))dr\, dz \leq \mu_o I \leq \int_{v\geq 0} g(r,v(r,z))dr\, dz \right\}$$

Nous initialisons par une fonction $u_o \in L^2(\Omega)$ quelconque; étant donnée une fonction u_n, nous définissons $u_{n+1} \in K$ par

<u>étape 1</u>

(1.7) $\begin{cases} L\, \tilde{u}_{n+1} = \begin{cases} g(r,u_n(r,z)) & \text{si } u_n(r,z) \geq 0, \\ 0 & \text{si } u_n(r,z) < 0, \end{cases} \\ \tilde{u}_{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} n+1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2, \end{cases}$

étape 2

$u_{n+1} = \tilde{u}_{n+1} + z_{n+1}$ où $z_{n+1} \in \mathbb{R}$ est solution de

$$(1.8) \quad \int_{u_{n+1}>0} g(r,u_{n+1}(r,z))dr\,dz \leq \mu_o I \leq \int_{u_{n+1}\geq 0} g(r,u_{n+1}(r,z))dr\,dz$$

Convergence de l'algorithme (cf [2] [3]) : plaçons-nous sous les hypothèses (H1) (H2), supposons que P et f^2 vérifient une hypothèse de croissance (1) et supposons enfin que l'ensemble des solutions de (1.6) est fini (condition en général réalisée) ; alors, pour toute initialisation u_o, la suite u_n converge (dans $H^1(\Omega)$ fort) vers une solution de (1.6).

1.3. Mise en oeuvre de l'algorithme

a) Etape 1 de l'algorithme :

Posant

$V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$,

la formulation variationnelle de (1.7) est

$$(1.9) \quad \int_\Omega \frac{1}{r} \nabla\tilde{u}_{n+1}.\nabla v\,dx = \int_{u_n\geq 0} g(r,u_n(r,z))\,dr\,dz \qquad \forall v \in V.$$

Discrétisation en variable d'espace

L'approximation numérique en variable d'espace utilise la donnée d'un ouvert polyédrique Ω_h inscrit dans Ω, d'une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω_h, de l'espace des éléments finis P_1 par morceaux

$$V_h = \{v_h \in C^\circ(\Omega_h),\ v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_{1h},\ v_{h|_T} \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

---

(1) il existe c et $\eta > 0$ tels que $P(u)$ et $f^2(u) \leq c(1+u^\eta)$ pour $u > 0$.

Nous associons alors à (1.9) le problème approché :
étant donné $u_n \in K \cap (V_h \quad \mathbb{R})$, trouver $\tilde{u}_{n+1} \in V_h$ tel que :

$$(1.10) \qquad \int_\Omega \frac{1}{r} \nabla \tilde{u}_{n+1} . \nabla v \, dx = \int_{u_n \geq 0} g(x, u_n(x)) v(x) \, dx \qquad \forall v \in V_h$$

Intégration numérique :

Un soin particulier a été pris dans le choix de la méthode d'intégration numérique du second membre de (1.10) pour prendre en compte la position $u_n \geq 0$ de façon exacte.

Pour une fonction u_n et un triangle $T \in \mathcal{T}_h$, quatre cas se présentent (dans ce qui suit, les sommets M_i sont numérotés de telle façon que $u_n(M_1) \leq u_n(M_2) \leq u_n(M_3)$).

1) $u_n \geq 0$ sur T : l'intégration numérique utilise la méthode des trois milieux de côtés, exacte sur P_2 ;

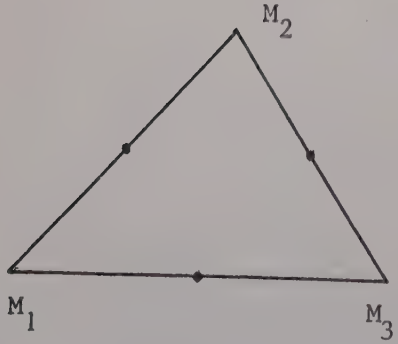
2) $u_n(M_1) < 0$, $u_n(M_2) \geq 0$, $u_n(M_3) \geq 0$:

l'ensemble $u_n \geq 0 \cap T$ est un quadrilatère ; nous le séparons en deux triangles et nous appliquons la méthode des trois milieux de côtés sur chacun d'eux ;

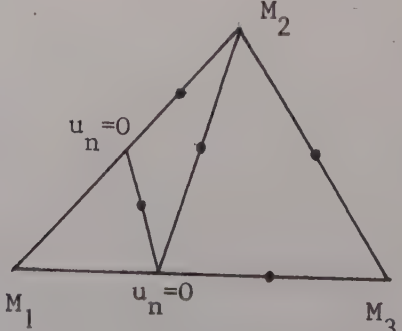
3) $u_n(M_1) < 0$, $u_n(M_2) < 0$, $u_n(M_3) \geq 0$:

l'ensemble $u_n \geq 0 \cap T$ est un triangle sur lequel est utilisée la méthode des trois milieux de côtés ;

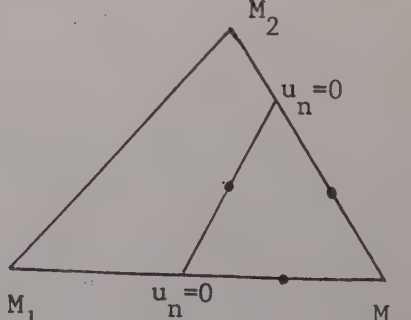
4) $u_n < 0$ sur T : l'intégrale vaut 0.



Cas 1



Cas 2



Cas 3

Cette méthode d'intégration numérique a comme avantages importants
i) d'être exacte si P et f^2 sont des polynômes de degré au plus deux
ii) d'être continue par rapport à u_n, si u_n n'a pas de palier en 0.

Résolution du système linéaire (1.10)

La matrice du système linéaire (1.10) est stockée sous forme Morse. Le rayon spectral $\rho(J)$ de la matrice de Jacobi associée est calculé par la méthode des puissances itérées. Le système linéaire (1.10) est résolu par la méthode de relaxation avec paramètre ω_o (proche de l'optimal) donné par

$$\omega_o = \frac{2}{1 + \sqrt{1-\rho(J)^2}}$$

Nous calculons également $\rho(L\omega_o)$ (par la méthode des puissances itérées) pour connaitre la vitesse de convergence de la méthode de relaxation.

b) Etape 2 de l'algorithme

Lors du calcul de la matrice (module MHDMAT), nous obtenons en impression la valeur des constantes

$$c_1 = \int_\Omega r dr dz, \quad c_2 = \int_\Omega \frac{1}{r} dr dz.$$

Nous avons vu précédemment (hypothèse H2) que la valeur $\mu_o I$ doit vérifier

$$\mu_o I < c_1 \cdot \lim_{u\to\infty} \mu_o P'(u) + c_2 \cdot \lim_{u\to\infty} f(u)f'(u).$$

Il existe donc un nombre s, utile dans cette 2ème étape de l'algorithme, tel que :

$$(1.11) \quad \begin{cases} \text{si} \quad \mu_o I < c_1 \mu_o P'(0) + c_2 f(0)f'(0), \quad s = 0 \\ \text{sinon, } s \text{ vérifie } \mu_o I = c_1 \mu_o P'(s) + c_2 f(s)f'(s) \end{cases}$$

Lorsque P et f^2 sont des polynômes de degré au plus 3, il est facile de calculer s. Pour plus de généralité, il suffira à l'utilisateur de fournir un majorant s_m de s, c'est-à-dire un nombre réel vérifiant

$$(1.12) \quad \mu_o I \leq c_1 \mu_o P'(s_m) + c_2 f(s_m) f'(s_m) ;$$

le nombre s sera alors calculé (module MHDPLA) par dichotomie grace à s_m

Les solutions z_{n+1} de (1.8) vérifient nécessairement, avec s ci-dessus,

$$(1.13) \qquad s - \max \tilde{u}_{n+1} \leq z_{n+1} \leq s - \min \tilde{u}_{n+1}$$

Ainsi une première méthode (assez coûteuse en temps calcul) pour résoudre (1.8) est la dichotomie avec les bornes précédentes.

Une autre méthode pour résoudre (1.8) est la méthode de Newton. En effet, la fonction

$$F(t) = \int_{u \geq -t} g(r,u(r,z)+t)\, dr\, dz$$

est dérivable, de dérivée :

$$F'(t) = \int_{u \geq -t} g'_s(r,u(r,z)+t)\, dr\, dz + \int_{u=-t} g(r,0)\, \frac{d\sigma}{|\nabla u|}.$$

L'utilisateur a le choix entre les deux méthodes précédentes. Dans la grande majorité des cas, la méthode de Newton converge ; elle est alors la plus rapide.

En ce qui concerne l'intégration numérique, nous décomposons les triangles comme dans l'étape 1 et nous utilisons sur chacun d'eux la méthode du barycentre (exacte si P et f^2 sont des polynômes de degré au plus égal à 2).

Le terme

$$\int_{u=t} g(r,0)\, \frac{d\sigma}{|\nabla u|}$$

est calculé de façon exacte.

Remarque 1.2. Dans l'exemple 2 du N°3, la méthode de Newton ne converge pas directement, mais on voit qu'il est possible de la combiner avec la méthode de dichotomie.

2. Mise en oeuvre des modules

2.1. Méthodologie

Les programmes présentés ici sont des modules qui s'enchainent par l'intermédiaire de leurs fichiers d'entrée-sortie. Il est donc possible au choix de l'utilisateur, de les enchainer dans une même séquence de travail ou dans des séquences différentes. Les seuls modules utilisant des cartes données sont INITI et APMEFI.

Le calcul et la visualisation d'un équilibre MHD demande la succession des étapes suivantes :

1) création de la triangulation :
   modules INITI et APMEFI (cf A. PERRONNET [6])

2) transformation de la structure de donnée MEFI fournie par APMEFI
   module MHDDEC

3) construction de la matrice du système linéaire
   module MHDMAT

4) calcul d'un équilibre
   modules INITI, MHDEQU, IMB

5) tracé des équipotentielles
   modules INIPLO, MHDTRA, ENDPLO

Par ailleurs, chaque module utilise un tableau de travail M ; nous en donnons ci-dessous la dimension minimale LM en fonction de :

NT = nombre de triangles de la triangulation
NS = nombre de sommets de la triangulation
N = nombre de sommets actifs (sommets non situés sur Γ_1)
LA = nombre de couples (M_i, M_j) de sommets actifs voisins.

Nous donnons également une majoration LLM de LM en fonction de NS et NT lorsque chaque sommet a au plus 6 voisins (triangulation usuelle)

Module	LM	LLM
MHDDEC	6 NT + 3 NS	6 NT + 3 NS
MHDMAT	6 NT + 4 NS + 3 N + 2 LA	6 NT + 21 NS
MHDEQU	5 NT + 4 NS + 3 N + 2 LA	5 NT + 21 NS
MHDTRA	10 NT + 8 NS	10 NT + 8 NS

Nous décrivons maintenant chaque module.

2.2. Module MHDDEC

But :

Décodage d'une structure de donnée MEFI.

Programme d'appel :

```
DIMENSION M ( )
CALL MHDDEC (N1, N2, M, LM)
```

où

N1 = numéro du fichier de la structure de donnée MEFI

N2 = numéro du fichier de sortie (triangulation) (on peut prendre N1 = N2)

LM = longueur du tableau M fourni.

Bibliothèques utilisées :

UTIL

PLMA

2.3. Module MHDMAT

But :

1) Assemblage de la matrice des produits scalaires H^1 des fonctions de base avec le poids 1/r (cas torique) ou sans poids (cas cylindrique)

2) Choix d'un paramètre de relaxation par la formule

$$\omega_o = 2/(1+\sqrt{1-\rho(J)^2}$$

où $\rho(J)$ est le rayon spectral de la matrice de Jacobi.

3) Calcul (ou évaluation) du rayon spectral de la matrice de relaxation $L\omega_o$ correspondant au paramètre ω_o calculé.

Programme d'appel :

```
DIMENSION M( )
DIMENSION ICL( )
LOGICAL TORUS, IMP
COMMON/MHDOR/IMP, NMAX, EPS
CALL MHDMAT (N1, N2, TORUS, ICL, LICL, M, M, LM)
```

où

N1 = numéro du fichier de la triangulation

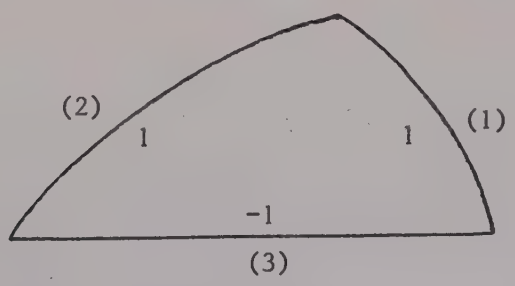
N2 = numéro du fichier de sortie (matrice)

TORUS (T/F) : cas torique ou cas cylindrique

ICL : tableau de correspondance entre numéros de références (fournis dans APMEFI) et références des conditions aux limites avec la convention :

- condition aux limites type ψ = cte : ref +1
- condition aux limites types $\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0$: ref -1

Ex :



numéros de référence (1), (2), (3) ; références des conditions aux limites 1,-1

correspondance : ICL (1) = 1, ICL (2) = 1, ICL (3) = -1.

LICL = longueur du tableau ICL (LICL ≥ 1)
LM = longueur du tableau M fourni

COMMON

utilisé pour le calcul de $\rho(J)$ et $\rho(L\omega_o)$ par la méthode des puissances itérées :
IMP(T/F) : impression ou non à chaque itération
NMAX = nombre maximal d'itérations
EPS = écart souhaité pour arrêt des itérations (les calculs sont faits en simple précision)

Bibliothèques utilisées :

PLMA

2.4. Module MHDEQU

But :

Calcul d'un équilibre MHD torique ou cylindrique

Programme d'appel :

```
DIMENSION M( )
DIMENSION ZB ( )
LOGICAL IMP
COMMON/MHDEQ/IMP(3), NMAX(3), EPS(3)
CALL INITI (M, LM, 0, 0)
CALL MHDEQU (N1, N2, N3, N4, Z, SM, ZB, NB, M, M, LM)
CALL IMB (M, N4, 1, IMPRE)
```

où

CALL INITI (M, LM, 0, 0) initialise le titre du travail (cf cartes données),

N1 = numéro du fichier de la triangulation
N2 = numéro du fichier de la matrice
N3 = numéro du fichier d'initialisation de l'algorithme (si N3 = 0, initialisation par la fonction FINI)
N4 = numéro du fichier de la solution obtenue (on peut prendre N4=N3, sauf bien sûr lorsque N3=0)

Z = valeur de $\mu_o I$ (I courant dans le plasma en ampères)

SM = nombre vérifiant (1.12)

NB = nombre de bobinages internes

ZB : tableau de longueur = max (1,3NB) avec

ZB(3(j-1)+1) abcisse du bobinage j

ZB(3(j-1)+2) ordonnée du bobinage j

ZB(3(j-1)+3) μ_o.courant du bobinage j

LM = longueur du tableau de travail M

CALL IMB(M, N4, 1, IMPRE) imprime la solution

IMPRE: entier entre 0 et 8

IMPRE = 4 impression des titres,

IMPRE = 5 impression des 10 premières lignes de la solution,

IMPRE = 8 impression complète de la solution,

(pour plus de détails sur IMB, cf [8]).

COMMON

IMP(J)	(1≤J≤3)	demande ou non d'impressions
NMAX(J)	(1≤J≤3)	nombre maximum d'itérations
EPS(J)	(1≤J≤3)	écart souhaité entre deux itérés (les calculs sont faits en simple précision)

où

J = 1 : algorithme global

J = 2 : calcul de la valeur au bord

J = 3 : méthode de relaxation

Choix de la méthode de calcul de la valeur au bord :

NMAX(2) > 0 méthode de Newton

NMAX(2) = 0 dichotomie (arrêt des itérations par EPS(2)).

Fonctions à fournir par l'utilisateur

1) FO(J,u), J = 1

où FO(1,u) = $\mu_o P(u)$

2) F1(J,u), J = 1, 2

où F1(1,u) = $\mu_o P'(u)$, F1(2,u) = f(u)f'(u)

3) F2(J,u), J = 1,2 (fonction utilisée seulement si NMAX(2) >0)

où $F2(1,u) = \mu_o P''(u)$, $F2(2,u) = f(u)f''(u) + f'^2(u)$

4) FINI(X1, X2) (fonction utilisée seulement si N3 = 0)

initialisation par $u_o(X1,X2) = FINI(X1, X2)$

Remarque : la fonction $FO(2,u) = \frac{1}{2} f^2(u)$ sera utilisée dans des modules à venir (calcul de la stabilité MHD axisymétrique), c'est pourquoi nous utilisons l'indice J dans FO.

Cartes données

. 72 caractères : Titre
. 8 caractères : Date
. 24 caractères : Nom de l'utilisateur

Les chaînes de caractères sont encadrées de ' et sont complétées éventuellement de blancs à droite ; elles ne peuvent pas chevaucher deux cartes (cf A. PERRONNET [6]).

Bibliothèques utilisées

UTDE
UTIL
UTSD
PLMA

2.5. Module MHDTRA

But :

Tracé de la triangulation et des équipotentielles du flux magnétique (soft BENSON niveau 1)

Programme d'appel :

```
DIMENSION M( ), KGROS(4)
LOGICAL IMP
CALL INIPLO   (allocation d'un buffer pour le soft Benson)
CALL MHDTRA (N1, N2, NN, KGROS, NFOR, IMP, M, M, LM)
CALL ENDPLO   (fin des dessins)
```

où

N1 = numéro de fichier de la triangulation

N2 = 0 pour tracé de la triangulation, ou numéro de fichier de la solution pour tracé des équipotentielles

NN = nombre d'équipotentielles

KGROS(J) (entre 1 et 7) grosseur des traits des équipotentielles

J = 1 interface plasma vide

J = 2 plasma

J = 3 vide

J = 4 séparatrices (équipotentielles avec point double)

on peut prendre KGROS(J) = 0 pour J = 3 ou 4.

NFOR : choix du format

NFOR = 1 21cm x 29,5cm

NFOR = 2 29,5cm x 21cm

NFOR = 3 38cm x 27cm

IMP (T/F) demande ou non d'impressions (contenus des blocs)

M : tableau de travail

LM = longueur du tableau M fourni

unité logique de sortie : unité n° 10

Bibliothèques utilisées :

TRAC (cf [4])

PLMA

2.6. STRUCTURE DES FICHIERS

1) Fichier de la triangulation

1er enregistrement

NS, NT

2ème enregistrement

((NU(K,I), K =1,3), I = 1, NT), ((C(K,I), K = 1,2), I = 1, NS)

(IR1(I), I = 1, NT), (IR2(I), I = 1, NS)

où

NU(K,I) : numéros des sommets du triangle I

C(K,I) : coordonnées du sommet I

IR1(I) : numéro de sous-domaine du triangle I (inutilisé ici)

IR2(I) : numéro de référence du sommet I

2) Fichier de la matrice

1er enregistrement

NS, NT, N, LA, OMEGA, C_1, C_2

2ème enregistrement

(IRA(I), I = 1, NS)

3ème enregistrement

(IA(I), I = 1, LA), (A(I), I = 1, LA)

4ème enregistrement

((COEF(K,I), K = 1,2), I = 1, NT)

où

OMEGA = paramètre de relaxation

C_1 = intégrale de r

C_2 = intégrale de $\frac{1}{r}$

IRA = tableau de renumérotation des sommets actifs

IA = pointeurs de la matrice

A = matrice

} sous forme Morse

COEF(1,I) = intégrale de r sur le triangle I

COEF(2,I) = intégrale de $\frac{1}{r}$ sur le triangle I

3) Fichier des solutions (entrée/sortie)

Il s'agit d'une structure de données B (cf [8])

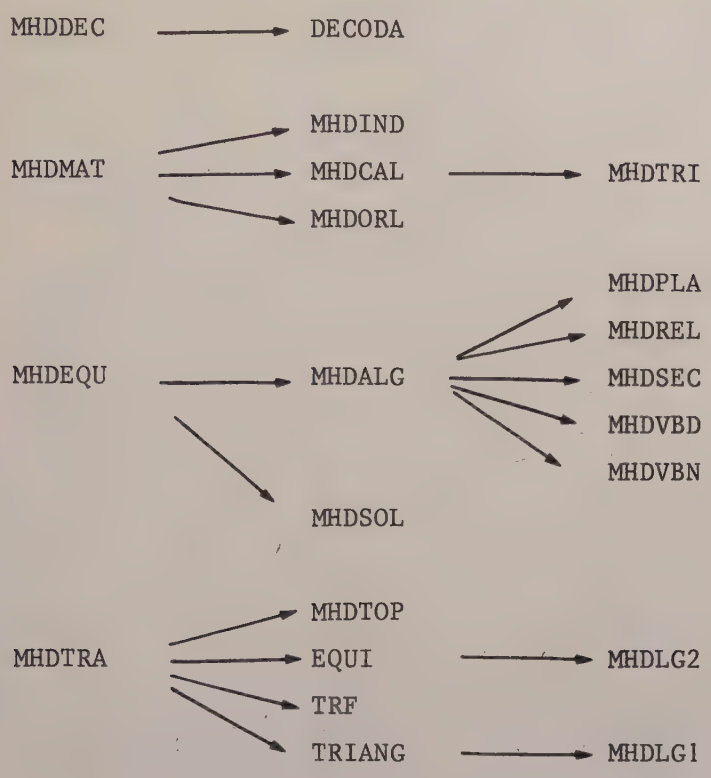
3 enregistrements de la forme (LE ≤ 32)

LE, (IB(I), I = 1, LE)

4ème enregistrement (la solution)

NS, (Y(I), I = 1, NS)

2.7. LISTE DES SOUS-PROGRAMMES :



Bibliothèques :

DECODA : UTIL

EQUI, TRF, TRIANG : TRAC

autres sous programmes : PLMA.

3. Exemples d'utilisation

Dans les deux exemples qui suivent, l'un sans bobinage interne, l'autre avec bobinage interne, nous avons choisi les fonctions ($\lambda > 0$ fixé)

$$P(u) = \lambda u, \quad f(u) = \text{cte}.$$

Nous résolvons donc le problème aux limites non linéaire discontinu suivant (H désigne la fonction d'Heaviside)

$$(3.1) \qquad \begin{cases} L\psi = \lambda r\, H(\psi) & \text{dans } \Omega, \\ \psi = \text{cte (inconnue) sur } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ -\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, d\sigma = \mu_o I. \end{cases}$$

La condition (H1) est vérifiée et la condition (H2) s'écrit

$$(3.2) \qquad \mu_o I < \lambda . \int_\Omega r dr dz \ ;$$

la solution de (1.11) est $s = 0$.

Puisque les solutions sont dans K, la surface du plasma (pour la mesure rdrdz) est connue à priori et vaut

$$(3.3) \qquad \int_{\Omega_p} r dr dz = \frac{\mu_o I}{\lambda}$$

3.1. Premier exemple

La configuration choisie est celle du Tokamak de Fontenay-Aux-Roses (TFR) ; les calculs sont faits sur un demi-domaine :

Ω = demi-disque ($x_2 \geq 0$) centré en $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, rayon 0.20

Courant de plasma (sur demi-domaine) :

$I = 200$ kA, soit $\mu_o I = 2.10^5 . 4\pi 10^{-7} \simeq 0.25$

valeur de λ :

d'après (3.2), il faut $\lambda > \frac{\mu_o I}{C_1} = \frac{0.25}{0.06265175} = 3.990\ 311$

nous choisissons $\lambda = 5$, qui donnera

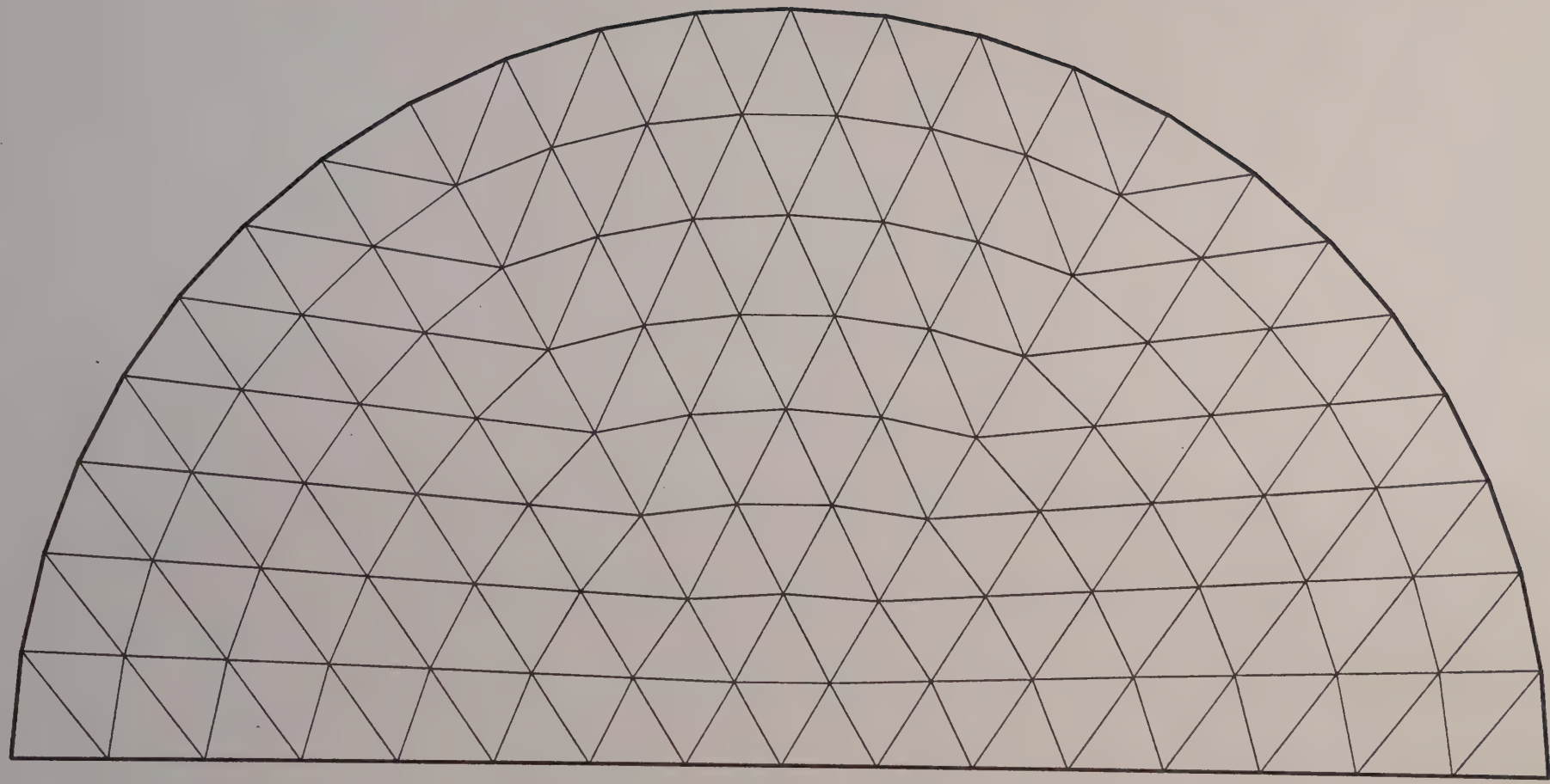
$$\int_{\Omega_p} rdrdz = 0.05.$$

La triangulation choisie (192 triangles et 117 sommets) permet un programme test rapide : le temps CPU total est 3mn8s sur Multics CII-HB 68, ce temps comprenant les ordres de tracé Benson.

Nous donnons aux pages suivantes le programme d'appel et les tracés Benson obtenus.

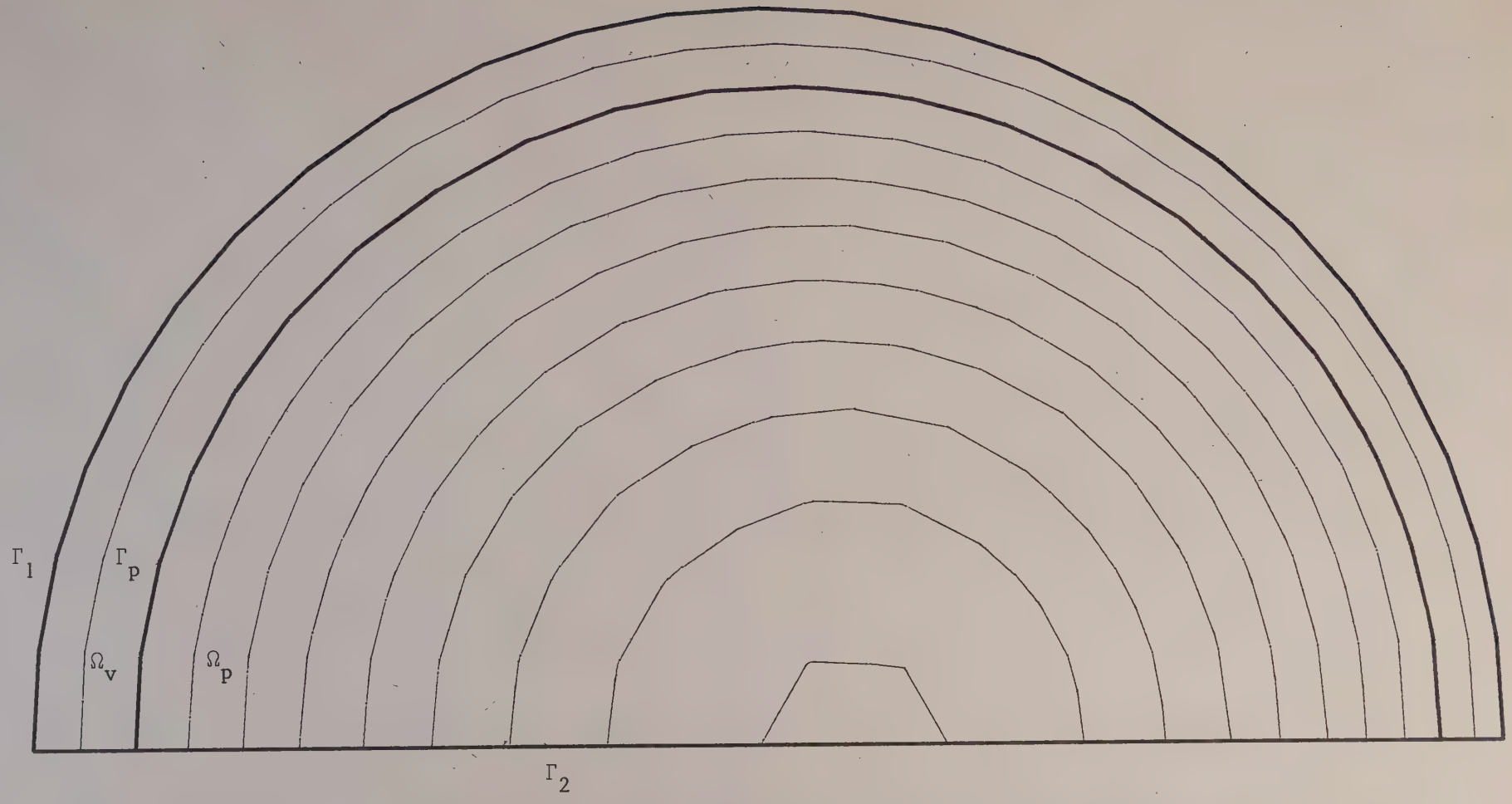
```
C*****************************************************************************
C
C
C                          PROGRAMME TEST NUMERO 1
C                          -----------------------
C
C*****************************************************************************
      DIMENSION M(10000)
      DIMENSION ICL(2),ZB(1),KGROS(4)
      LOGICAL IMP1,IMP,TORUS,IMPD
      COMMON /MHDDOR/ IMP1,NMAX1,EPS1
      COMMON /MHDEQ/IMP(3),NMAX(3),EPS(3)
C     AL EST UTILISE DANS F0,F1,F2
      COMMON /FA/AL
      DATA ICL /1,-1/
      DATA KGROS/3,1,1,1/
C     LONGUEUR DU SUPER-TABLEAU
      LM=10000
C     TITRE DE LA TRIANGULATION
      IMPRE=0
      NNN=0
      CALL INITI(M,LM,IMPRE,NNN)
C     CONSTRUCTION DE LA TRIANGULATION
      CALL APMEFI(M,M,M)
C     DECODAGE DE LA STRUCTURE DE DONNES MEFI
      N1=1
      N2=1
      CALL MHDDEC(N1,N2,M,LM)
C     CONSTRUCTION DE LA MATRICE
      N2=2
      TORUS=.TRUE.
      LICL=2
      IMP1=.FALSE.
      NMAX1=5000
      EPS1=1.E-5
      CALL MHDMAT(N1,N2,TORUS,ICL,LICL,M,M,LM)
C     TITRE DU CALCUL
      CALL INITI(M,LM,IMPRE,NNN)
C     CALCUL D'UN EQUILIBRE
      N3=0
      N4=3
      AL=5.
      Z=0.25
      SM=0.
      NB=0
      DO 1 I=1,3
      NMAX(I)=100
      EPS(I)=1.E-6
 1    CONTINUE
      IMP(1)=.TRUE.
      IMP(2)=.FALSE.
      IMP(3)=.FALSE.
      CALL MHDEQU(N1,N2,N3,N4,Z,SM,ZB,NB,M,M,LM)
C     IMPRESSIONS
      CALL IMB(M,N4,1,5)
C     DEBUT DES DESSINS
      CALL INIPLO
      NFOR=2
      IMPD=.TRUE.
C     TRACE DE LA TRIANGULATION
      CALL MHDTRA(N1,0,0,KGROS,NFOR,IMPD,M,M,LM)
C     TRACE DES EQUIPOTENTIELLES
      NN=10
      CALL MHDTRA(N1,N4,NN,KGROS,NFOR,IMPD,M,M,LM)
C     FIN DES DESSINS
      CALL ENDPLO
      STOP
      END
```

```
*****************************************************************************
                          FONCTIONS
*****************************************************************************
      FUNCTION FFRONT(I,X1,X2)
      FFRONT=(X1-1.)*(X1-1.)+X2*X2-0.04
      RETURN
      END
      FUNCTION F0(J,U)
      COMMON /FA/ AL
      F0=AL*U
      RETURN
      END
      FUNCTION F1(J,U)
      COMMON /FA/ AL
      GO TO (1,2),J
1     F1=AL
      RETURN
2     F1=0.
      RETURN
      END
      FUNCTION F2(J,U)
      F2=0.
      RETURN
      END
      FUNCTION FINI(X1,X2)
      FINI=(X1-1.)*(X1-1.)+X2*X2-0.04
      RETURN
      END
*****************************************************************************
                          CARTES DONNEES
*****************************************************************************
'DEMI DISQUE DE RAYON 0.2 ET DE CENTRE X1=1. X2=0.'
'01/82'   'MICHEL SERMANGE'
'GENERALITES'
'DEMI DISQUE DE RAYON 0.2 ET DE CENTRE X1=1. X2=0.'
'01/82'   'MICHEL SERMANGE'
) 1 1 2 2 0
'POINTS DE LA TRIANGULATION'
)
) 1 1.2 0.
) 1 1.1 0.1732051
) 1 0.9 0.1732051
) 1 0.8 0.
) 2 1. 0.
'COME FI'
) 20 3 0
) 1 2 0 2 1 0 0 1
) 2 3 0 0 1 0 0 1
) 3 4 0 0 1 2 0 1
'RETRIANGULATION'
) 20 20 1 8
'FIN DU MODULE APMEFI'
'**** P(S)=AL*S AVEC AL=5 **** F(S)=CTE ***** Z=0.25****'
'01/82'   'MICHEL SERMANGE'
```



NOMBRE DE SOMMETS = 117

NOMBRE DE TRIANGLES= 192



**** P(S)=AL*S AVEC AL=5 **** F(S)=CTE ***** Z=0.25****

3.2. Deuxième exemple

Le dispositif ASDEX (RFA) est un TOKAMAK dont la chambre à vide, rectangulaire, comprend des bobinages internes destinés à créer un plasma de forme allongée terminé à chaque extrémité par une boucle. Nous faisons ici une schématisation de ce dispositif et nous employons des valeurs numériques qui ne correspondent pas aux données réelles. Nous traitons le problème dans un cylindre droit.

Domaine Ω

rectangle 1m x 1.5m avec condition de symétrie sur le côté bas (cf fig.2)

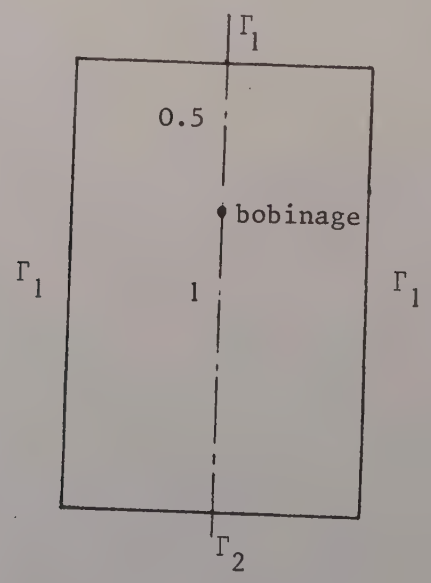
Triangulation : triangulation régulière, 1200 triangles, 651 sommets

Courants

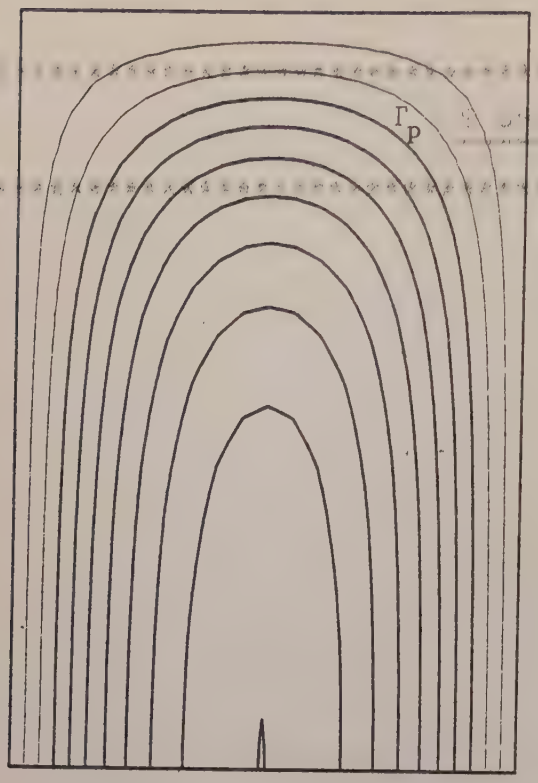
courant de plasma : $\mu_o I = 1$

courant de bobinage : $\mu_o I_B$ varie entre 0 et 0.5

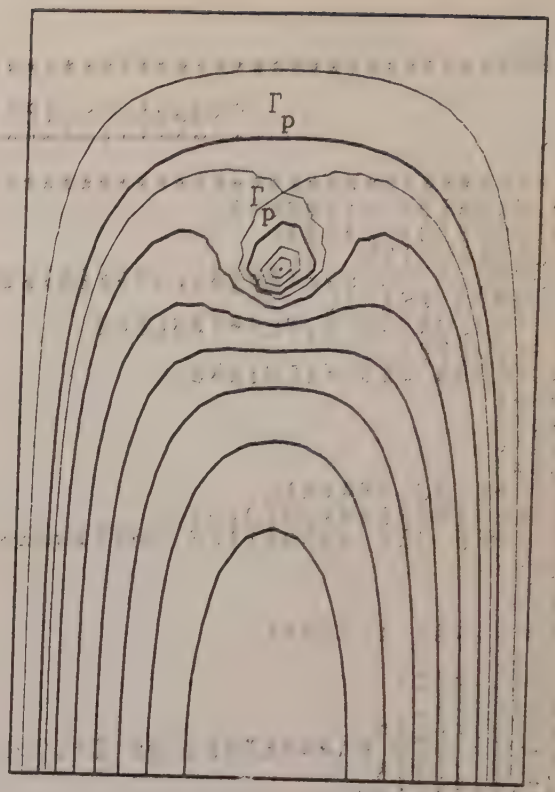
La triangulation et la matrice sont calculées et stockées une seule fois. A la page suivante, nous donnons le programme d'appel par le calcul d'un équilibre (temps CPU sur HB68 : 3mn57s). Dans les pages ultérieures nous donnons les tracés des équipotentielles dans le plasma (trait fort) dans le vide (trait fin) et des séparatrices - équipotentielles avec points doubles (traits fins). Nous observons plusieurs changements de topologie intéressants, suivant les valeurs de $\mu_o I_B$. Les dernières figures sont des perspectives de la surface de pression (programmes de visualisation de E. SALTEL- A. MARROCCO)



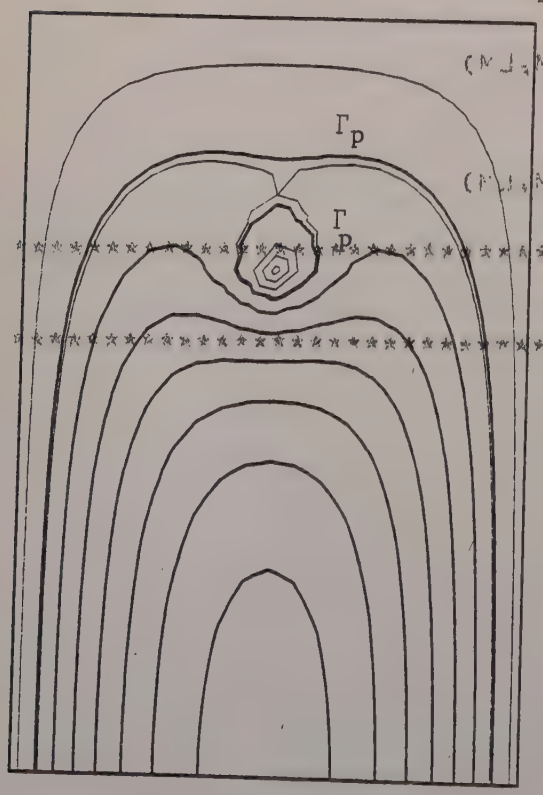
```
C*********************************************************************
CCC
CCC                    PROGRAMME TEST NUMERO 2
CCC                    -----------------------
C*********************************************************************
      DIMENSION M(20000)
      DIMENSION ZB(3)
      LOGICAL IMP
      COMMON /MHDEQ/IMP(3),NMAX(3),EPS(3)
      COMMON /FA/AL
C     LONGUEUR DU SUPER-TABLEAU
      LM=20000
C     NUMEROS DES FICHIERS
      N1=1
      N2=2
      N3=0
      N4=3
C     TITRE DU TRAVAIL
      CALL INITI(M,LM,0,0)
C     DONNEE DES QUANTITES PHYSIQUES
      AL=1.
      Z=1.
      S=0.
C     BOBINAGE INTERNE
      NB=1
      ZB(1)=10.
      ZB(2)=1.
      ZB(3)=0.16
C     CHOIX DES PARAMETRES DE CALCUL
      DO 1 I=1,3
      NMAX(I)=100
      EPS(I)=1.E-6
 1    CONTINUE
      IMP(1)=.TRUE.
      IMP(2)=.FALSE.
      IMP(3)=.FALSE.
C     DEBUT DE L'ALGORITHME AVEC DICHOTOMIE
      NMAX(2)=0
      EPS(1)=1.E-2
      CALL MHDEQU(N1,N2,N3,N4,Z,S,ZB,NB,M,M,LM)
C     SUITE DE L'ALGORITHME AVEC NEWTON
      N3=N4
      NMAX(2)=100
      EPS(1)=1.E-6
      CALL MHDEQU(N1,N2,N3,N4,Z,S,ZB,NB,M,M,LM)
      STOP
      END
C*********************************************************************
CCC                        FONCTIONS
CCC
C*********************************************************************
      FUNCTION F0(J,U)
      COMMON /FA/AL
      F0=AL*U
      RETURN
      END
      FUNCTION F1(J,U)
      COMMON /FA/ AL
      GO TO (1,2),J
 1    F1=AL
      RETURN
 2    F1=0.
      RETURN
      END
      FUNCTION F2(J,U)
      F2=0.
      RETURN
      END
      FUNCTION FINI(X1,X2)
      FINI=X2
      RETURN
      END
C*********************************************************************
CCC
CCC                  CARTES DONNEES
CCC
C*********************************************************************
*****  MJO*COURANT DE BOBINAGE=0.16   ****
* 02/82    *  *MICHEL SERMANGE
```



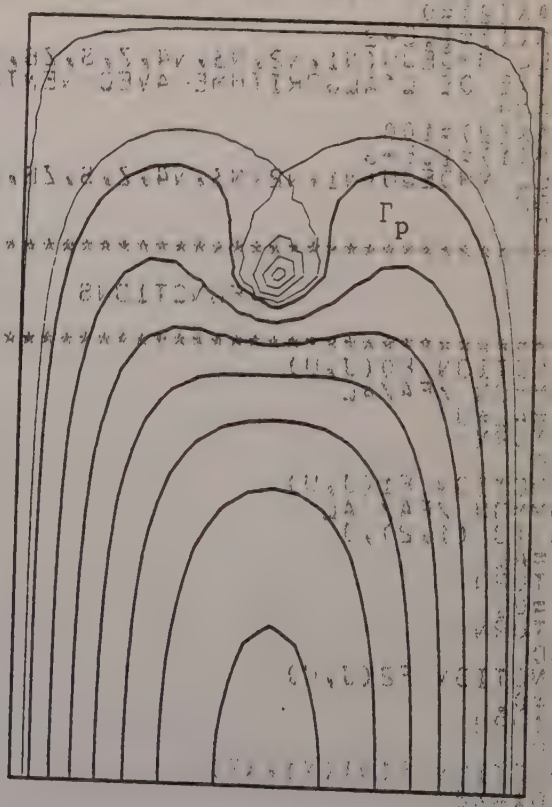
$\mu_o I_B = 0$



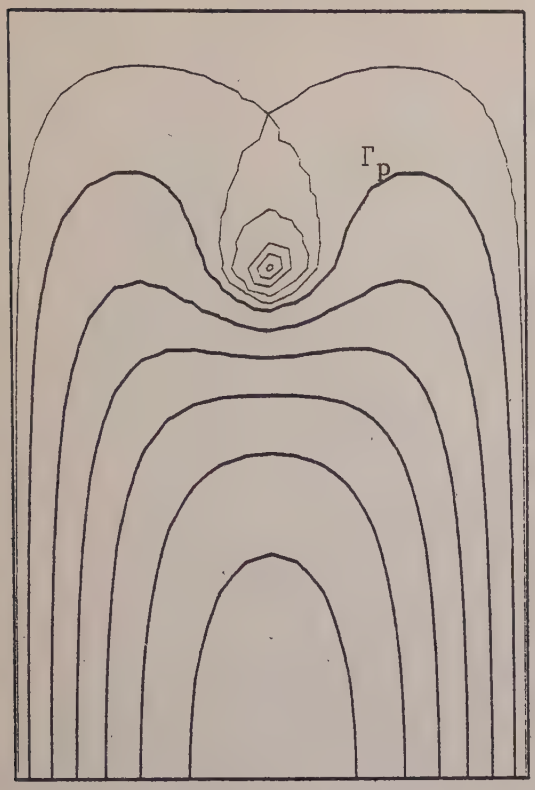
$\mu_o I_B = 0.15$



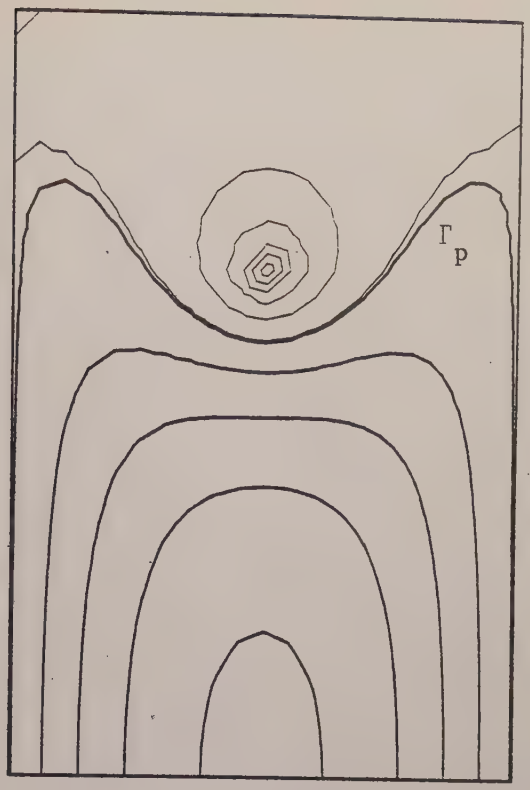
$\mu_o I_B = 0.16$



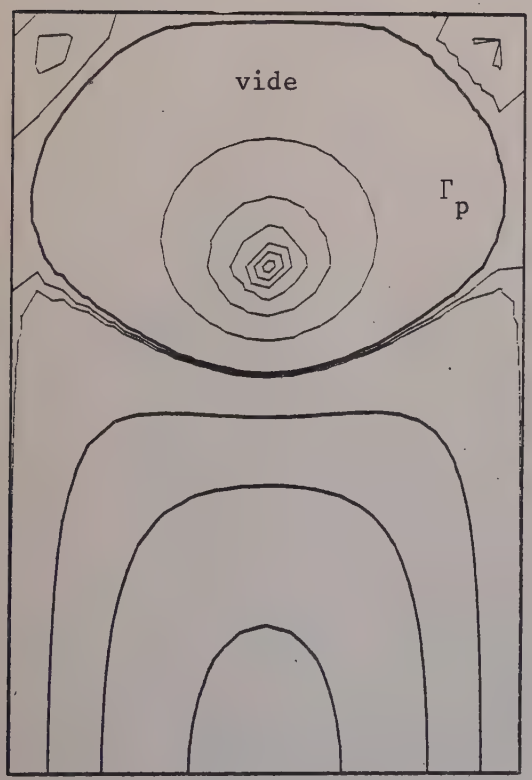
$\mu_o I_B = 0.17$



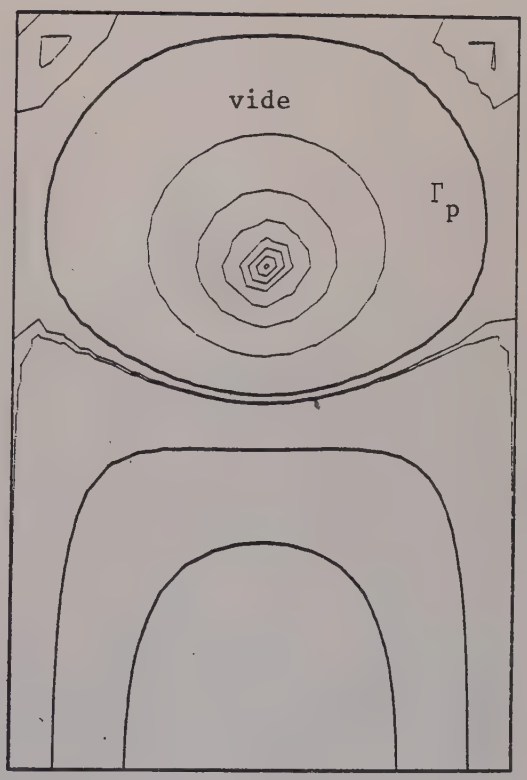
$\mu_o I_B = 0.20$



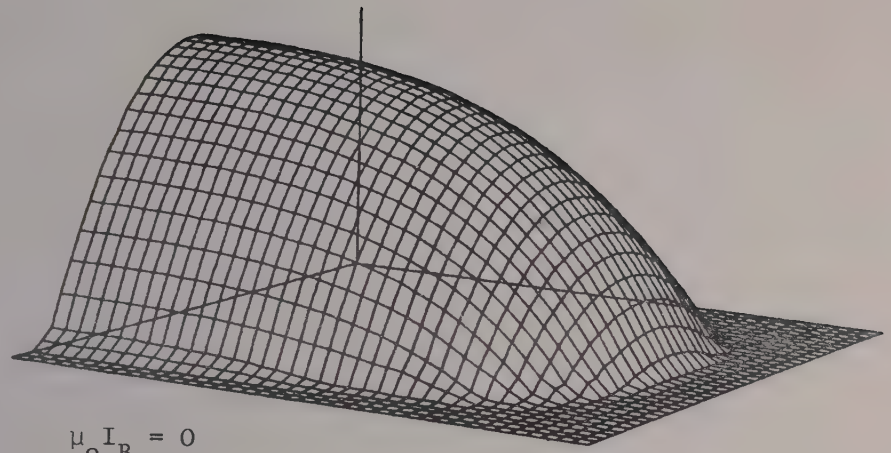
$\mu_o I_B = 0.30$



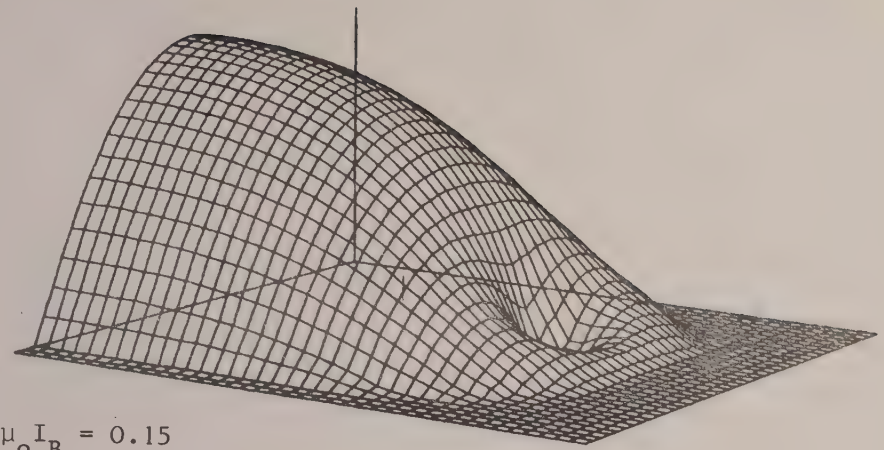
$\mu_o I_B = 0.40$



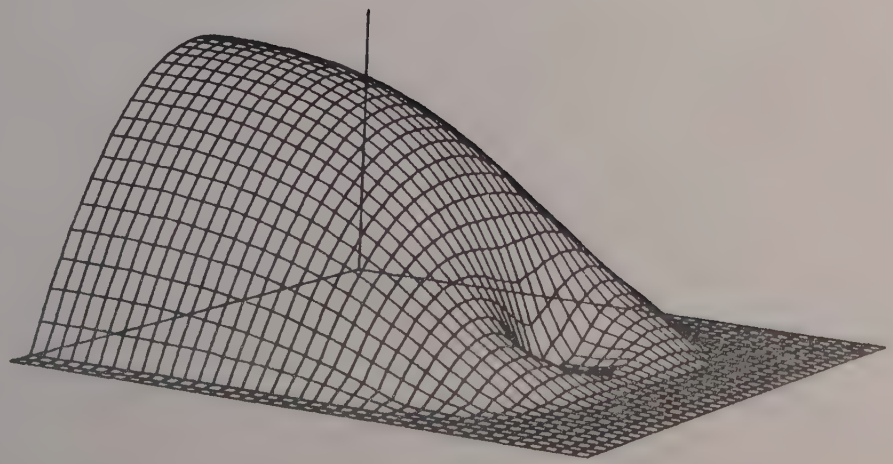
$\mu_o I_B = 0.50$



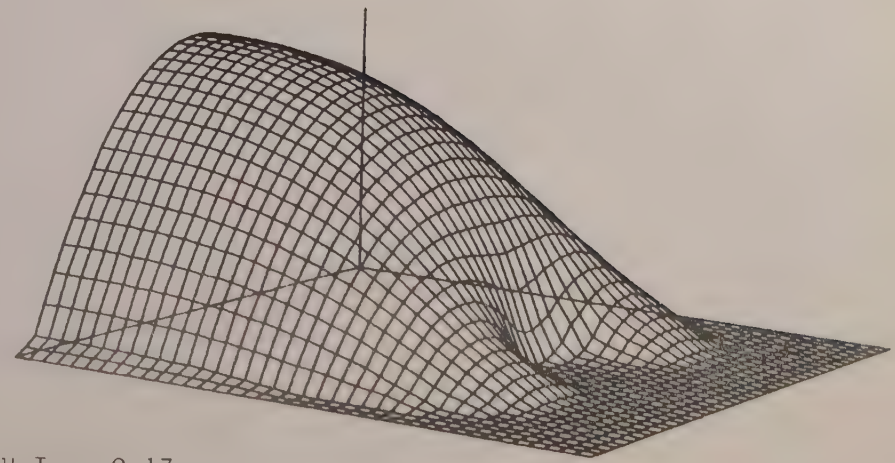
$\mu_o I_B = 0$



$\mu_o I_B = 0.15$



$\mu_o I_B = 0.16$



$\mu_o I_B = 0.17$

REFERENCES

[1] G. BATEMAN, "MHD instabilities", the MIT Press, Cambridge (Massachusetts) 1978.

[2] H. BERESTYCKI-H. BREZIS, "On a free boundary problem arising in plasma physics", Nonlinear Anal. The. Meth. Appl. 4, 451-436, (1980)

[3] B. HERON-M. SERMANGE, "Non convex methods for computing free boundary equilibria of axially symmetric plasmas", Appl. Math. and Opt. (à paraître dans 8, 1982).

[4] A. MARROCCO, "Bibliothèque de tracés", Club Modulef, Oct. 1979.

[5] C. MERCIER, "The magnetohydrodynamic approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configurations", Publication of EURATOM, CEA, Luxembourg 1974.

[6] A. PERRONNET, "Le module APMEFI", Version 3.2., Club Modulef, Mai 1981.

[7] R. TEMAM, "A non linear eigenvalue problem : the shape of equilibrium of a confined plasma", Arch. Rat. Mech. Anal. 60 ,51-73 (1975).

[8] "Description des structures de données du Club Modulef", Club Modulef, Février 1979.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

ISBN 2 - 7261 - 0297 - 2